



problemy agrofizyki

POLSKA AKADEMIA NAUK . ZAKŁAD AGROFIZYKI



Ossolineum

zeszyt 7

rok 1973

**PODSTAWY TEORETYCZNE
BADANIA WŁAŚCIWOŚCI MECHANICZNYCH GLEB**

P O L S K A A K A D E M I A N A U K
ZAKŁAD AGROFIZYKI W LUBLINIE

PROBLEMY AGROFIZYKI

7

WROCLAW · WARSZAWA · KRAKÓW · GDAŃSK
ZAKŁAD NARODOWY IMIENIA OSSOLIŃSKICH
WYDAWNICTWO POLSKIEJ AKADEMII NAUK

PROBLEMY AGROFIZYKI

7

ADAM PUKOS, RYSZARD WALCZAK

PODSTAWY TEORETYCZNE BADANIA WŁAŚCIWOŚCI MECHANICZNYCH GLEB

**WROCLAW · WARSZAWA · KRAKÓW · GDAŃSK
ZAKŁAD NARODOWY IMIENIA OSSOLIŃSKICH
WYDAWNICTWO POLSKIEJ AKADEMII NAUK**

1973

Komitet Redakcyjny:
BOHDAN DOBRZAŃSKI (przewodniczący)
JAN GLIŃSKI, BOGUSŁAW SZOT

Okladkę projektował: ZYGMUNT ZIEMKA
Redaktor Wydawnictwa: AURELIA PODGÓRSKA

Wszelkie prawa zastrzeżone. Printed in Poland

Zakład Narodowy im. Ossolińskich — Wydawnictwo, Wrocław 1973.
Nakład: 380 + 120 egz. Objętość: ark. wyd. 2,30, ark. druk. 3,63.
Papier offset, kl. III, 70 g, 70 × 100. Oddano do druku 31 X 1973.
Druk ukończono w listopadzie 1973. Wrocławska Drukarnia Naukowa.
Zam. 1836/73 — N-15. Cena zł 10.—

WSTĘP

Nazwę reologia wprowadził według M.Reinera /37/ w 1928 r. w USA Bingham. Reologia rozumiana pierwotnie jako nauka o płynięciu ciał, od greckiego "rheo" - płynąć, miała /Wolarowicz /48//: "... badać głównie zagadnienia deformacji i płynięcia łatwo odkształcalnych materiałów, tj. lepkie płynięcie cieczy, anomalie płynięcia i plastyczność koloidów, a także zjawiska relaksacji, opóźnienia sprężystego i tiksotropii w ośrodkach rozdrobnionych". Takim rozdrobnionym, wieloskładnikowym ośrodkiem jest gleba, zmieniona dodatkowo przez zachodzące w niej procesy organiczne. Ziarna okruszków mineralnych tworzące "szkielet" gleby nie są na ogół powiązane ze sobą w sposób dostatecznie trwały, a w niektórych rodzajach gleb ułożone są zupełnie swobodnie obok siebie /np. gleby piaszczyste/. Wzajemne ułożenie ziaren jest zupełnie dowolne, podobnie jak ich kształt. W porach między ziarnami znajduje się gaz lub ciecz, bądź też i gaz i ciecz. Oznacza to wyraźnie występująca u większości gleb zdolność do odkształceń objętościowych, z reguły nieodwracalnych, z drugiej zaś strony wskazuje na podstawową rolę, jaką w procesie odkształcania się gleb musi odgrywać zawartość w porach gazu lub cieczy. Dlatego różne gleby posiadają w różnym stopniu wszystkie własności reologiczne: sprężystość, lepkość, plastyczność. Poza tym niektóre gleby odznaczają się zdolnością do nagłych zmian właściwości /struktury, objętości, konsystencji/ pod działaniem obciążeń i dodatkowych czynników fizycznych /wstrząsy, nawilgocenie/.

Gleba więc, ze względu na swoją złożoną strukturę, jeszcze bardziej różni się od ciała idealnie sprężystego niż wszystkie inne ciała, z którymi ma do czynienia współczesna technika.

Ciało sprężyste odkształca się natychmiast i odkształcenia jego nie zmieniają się przy stałych siłach działających na te

ciała. Można też badać w taki sam sposób ciała niesprężyste, pod warunkiem że po przyłożeniu obciążenia i doprowadzeniu ciepła przerwie się obserwację, a wznowi się ją dopiero wówczas, gdy po okresie zaburzeń spowodowanych procesami nieustalonymi nastąpi stabilizacja stanu ciała. Takie badanie jest możliwe, gdy przebiegi nieustalone kończą się w stosunkowo krótkim czasie, gdy jednak trwają długo /np. pełzanie, osiadanie, relaksacja/, to pomijanie okresu nieustalonego byłoby niewłaściwe. Wprowadzenie czynnika czasu do równań stanu staje się więc niezbędne. Kroku tego w odniesieniu do wszelkich materiałów dokonano w reologii. Na podstawie powyższych uwag można więc określić reologię jako naukę o procesach nieustalonych /których szczególnym przypadkiem są procesy ustalone, zrównoważone/, zachodzących w materiałach pod działaniem czynników mechanicznych i termicznych.

W ciałach rzeczywistych poddanych działaniu naprężeń występuje zjawisko zwane rozproszeniem /dysypacją/ energii w czasie odkształcania. Pojęcie odkształcania stosujemy zarówno do scharakteryzowania całego stanu przemieszczeń punktów ciała, jak i do określenia chwilowego /w dowolnej ustalonej chwili czasu/ stanu ciała w trakcie procesu odkształcania. Dopóki nie zostanie osiągnięta stała prędkość odkształcania, poszczególne punkty ciała doznają przyspieszeń. Podstawowa własność ciał rzeczywistych polega na tym, że dla utrzymania w nich stałego odkształcania lub też przyrostu odkształcania oprócz sił przyspieszających cząstki ciała powinny być przyłożone siły dodatkowe. W wielu przypadkach dla utrzymania odkształcania stałego /przypadek relaksacji naprężeń/ potrzebne jest działanie na ciało określonych sił w ograniczonym lub nieograniczonym okresie czasu. Ciała, dla których takie działanie sił jest niepotrzebne, nazywamy płynami lub gazami w odróżnieniu od innych ciał zwanych ciałami stałymi. Hohenemser i Prager /15/ oraz Kisiel /20/ proponują bardziej ścisłą definicję ciała stałego: "Ciałem stałym nazywany będzie układ materialny, którego odkształcania pozostają ograniczone i skończone pod działaniem ograniczonych i skończonych obciążeń, niezależnie od czasu, w ciągu którego obciążenia działają na ciało". W warunkach rzeczywistych nie ma ciał stałych w sensie tej definicji/ jak

stwierdza Reiner /36/: "Wszystko płynie, jeśli jest na to dość czasu"/, jest ona jednak wygodna do matematycznych rozważań.

W ciele doskonale sprężystym dla utrzymania dokonanego już odkształcenia w ciągu dowolnego okresu czasu trzeba utrzymać takie obciążenia, które działały w ostatnim momencie procesu odkształcenia. Jednak w energii dostarczonej dla utrzymania tego stanu ciała, na którym zatrzymał się proces odkształcania, nie zajdą żadne zmiany. Zachowanie się ciała doskonale sprężystego w procesie odkształcania nie zależy od prędkości odkształcenia. Proces odkształcania takich ciał można przedstawić w ujęciu termodynamiki fenomenologicznej jako ciągły zbiór stanów równowagi, w których naprężenia zależą tylko od wartości odkształcenia, a nie zależą od prędkości, przyspieszeń lub od częstości odkształceń w ruchu drgającym. Układ wytworzonych w ciele naprężeń dokładnie wyznacza układ obciążeń wywołujących odkształcenie. Odkształcenie zmienia się dokładnie w ten sam sposób przy odciażaniu, jak następował jego przyrost przy obciążaniu, tj. przy cyklu obciążenie-odciążenie nie uzyskuje się pętli histerezy. Odkształcenie jest więc procesem odwracalnym. Z energetycznego punktu widzenia nazywamy takie ciało układem zachowawczym /nie ma dysypacji energii/. Jeżeli takie ciało sprężyste podlega prawu "Hooke'a, tzn. zachodzi dla niego ścisła proporcjonalność między naprężeniem i odkształceniem, to nazywa się je ciałem liniowo sprężystym.

W cieczy każde nowe przemieszczenie punktów wyznacza jej nowe położenie równowagi. Skoro dla utrzymania danej konfiguracji cieczy nie trzeba żadnych sił, to przyłożenie już nawet najmniejszej siły wywołuje jej odkształcenie. W wyniku samodyfuzji zmiany względnych położenia punktów materialnych zachodzą samorzutnie i bez przerwy. Wobec braku określonego kształtu nie możemy mówić o odkształceniu cieczy w sensie statycznym. Zatem taki proces odkształcenia jest procesem nieodwracalnym. Nie możemy więc w cieczy akumulować żadnej energii odkształcenia. Dlatego proces odkształcenia, tzn. wymuszone przechodzenie cieczy przez szereg lokalnych nieskończenie bliskich stanów równowagi z daną prędkością, wymaga przyłożenia pewnych sił. Pochłaniana w takim procesie nieodwracalnym praca zamienia się na ciepło. W najprostszym przypadku tzw. cieczy Newto-

na zachodzi ścisła proporcjonalność między ciśnieniem a prędkością odkształcenia postaciowego.

Wyróżniamy dwa skrajne przypadki ciał idealnych: ciało stałe doskonale sztywne i ciecz doskonałą. Materiały rzeczywiste mieszczą się między tymi przypadkami granicznymi. Zmieniając temperaturę i ciśnienie można spowodować płynięcie każdego ciała. Mimo różnorodności wszelkich możliwych charakterystyk i możliwych rozwojów struktur w praktyce mówi się o dwóch zasadniczych rodzajach ciał: stałych i ciekłych. Ciała pośrednie, wykazujące zarówno cechy jednych jak i drugich, nazywamy ciałami lepkosprężystymi. Zdolne one są do akumulowania części energii odkształcenia, jak i do jej rozpraszania, poddane cyklowi obciążenie-odciążenie dają pętle histerezy. Różnica między pracą włożoną w proces odkształcenia przy obciążeniu a pracą zwróconą podczas odciążania jest równoważna energii rozproszonej. Za rozproszenie energii czynimy odpowiedzialnym tarcie wewnętrzne, czyli opór stawiany przemieszczaniu się jednej warstwy cieczy po drugiej. Energia dysypowana w ciele lepkosprężystym jest równoważna pracy sił tarcia wewnętrznego. Ciała takie poddane stałemu naprężeniu "płyną" powoli w czasie. Proces takiego płynięcia nazywa się pełzaniem. Prócz tego obserwujemy w tych ciałach zjawisko odprężenia się ciała w czasie, zwane relaksacją naprężeń.

Jeżeli uważamy ciało za nieziarniste, tzn. jednorodne i pozbawione struktury, to takie podejście nazywa się makroreologicznym. W rzeczywistości jednorodne są tylko płyny i pojedyncze kryształy. Większość ciał jest niejednorodna albo quasi-jednorodna, tzn. ma strukturę, chociaż nie zawsze jest ona widoczna bezpośrednio. Część reologii, która uwzględnia strukturę nazywa się mikroreologią. O sumarycznym stanie odkształcenia ciała lub relaksacji decyduje stan struktury. Niejednorodność struktury sprzyja niejednorodności odkształceń i naprężeń ziaren i ich części. W ciele takim po kolejnych stanach obciążeń i odciążeń pozostaje "historia" w postaci odkształceń i naprężeń wstępnych /własnych/, które w szczególnych przypadkach mogą przybierać duże wartości. Z upływem czasu powstałe naprężenia lokalne mogą relaksować - "historia" zmienia się.

Tam gdzie naprężenia są dostatecznie duże w porównaniu ze

spójnością, nastąpić może utrata spójności, a przy powstaniu mikroszczelin powrót odkształcenia do stanu wyjściowego staje się niemożliwy. Gdy te zmiany nabierają charakteru makroskopowego, mówimy o osiągnięciu granicy plastyczności. Płynięcie plastyczne powstaje w ciele stałym pod wpływem naprężeń stycznych przekraczających określoną wartość, a ustaje, gdy naprężenia zmniejszą się poniżej krytycznych. Ponadto płynięcie plastyczne charakteryzuje się tym, że wartość energii dysypowanej zależy w znacznie większym stopniu od granicy plastyczności niż od prędkości odkształcenia, gdyż wielkość i ruchliwość lokalnych obszarów płynięcia zmienia się ze zmianą obciążenia.

Dla odkształceń okresowo zmiennych przesunięcie fazowe między wartością odkształcenia i jego prędkością może wynosić 90° , gdyż szybkość odkształcenia osiąga maksimum przy minimalnych odkształceniach, natomiast jest minimalna przy odkształceniach bliskich maksimum. Jeżeli więc zmiany wewnętrzne są związane z wartością odkształcenia, to mają naturę sprężystą, jeśli zaś są związane z prędkością odkształcenia - ujawni się ich charakter lepki.

W ostatnich latach ukazało się wiele prac o termodynamicznej teorii "materiałów z pamięcią" /1, 7, 8, 13, 27, 31, 32/. Autorzy wykorzystują rozbudowane metody geometrii analitycznej i różniczkowej, interpretując geometrycznie naprężenia i odkształcenia jako tensory w trójwymiarowej przestrzeni kartezjańskiej bądź jako tensory podwójne w dwóch przestrzeniach n -wymiarowych. Pierwsze z tych matematycznych podejść do zagadnień reologii znane jest w mechanice ośrodków ciągłych. Założenie ciągłości ośrodka wymaga, aby ciała były bryłami geometrycznymi wypełnionymi materią w sposób ciągły. Ośrodek ciągły jest matematyczną idealizacją, chociażby z powodu atomistycznej budowy materii - rozważamy bowiem matematyczne punkty zamiast atomów. Dodatkową trudnością w zastosowaniu metod reologii do badania naprężeń i odkształceń w glebie jest jej rozdrobnienie. Siły działające na glebę przekazują się przez styki między jej ziarnami /cząstkami/. Aby określić rzeczywisty układ sił panujący w rozważanym obszarze gleby, należałoby rozpatrywać zbiór wszystkich elementów, różnych pod względem kształtu i wymiarów, przenoszących oddziaływania zew-

nętrzne przez siły na stykach. Wydaje się niemożliwe rozwiązanie tak postawionego zadania. Próby teoretycznego modelowania ośrodków rozdrobnionych, takich jak gleba, grunt itp., za pomocą regularnych elementów /kule, wałki/ nie dają dotychczas rozwiązań, mających znaczenie praktyczne. Jeśli rozpatrujemy elementy powierzchni "małe" w porównaniu z całym obszarem ośrodka, ale "duże" względem rozmiarów pojedynczych ziaren szkieletu ośrodka, to możemy traktować dany obszar jako ośrodek ciągły. Wówczas statystyczny efekt działania nieskończenie wielu małych sił na rozpatrywanej powierzchni lub w wyodrębnionej objętości będzie bliski efektowi działania siły rozłożonej w sposób ciągły. Ponadto często przy tych założeniach traktuje się ośrodek rozdrobniony jako jednorodny, izotropowy, a odkształcenia uważa się w klasycznych teoriach sprężysto-lepkoplastyczności za małe. O ostatnim założeniu będzie jeszcze mowa w dalszym ciągu pracy.

1. TENSORY NAPRĘŻENIA I ODKSZTAŁCENIA

W literaturze na temat opisu deformacji i naprężenia /11, 30, 31/ można zauważyć, że notacja rachunku tensorowego jest szczególnie wygodna do opisu zjawisk reologicznych. Wychodząc z postulatu ciągłości przedstawimy naprężenie i odkształcenie jako tensory o walencji 2 w trójwymiarowej przestrzeni kartezjańskiej w sposób znany w mechanice /46/. Na materię rozważanego ośrodka mogą działać siły zewnętrzne dwojakiego rodzaju: siły objętościowe /np. siła grawitacji/ i siły powierzchniowe /np. ciśnienie/. Zasięg działania sił wewnętrznych można uważać za mały. Jeżeli wyobrazimy sobie cięcie przedzielające ośrodek, to na graniczne cząstki po jednej stronie działają siły pochodzące od cząstek po drugiej stronie cięcia. Na warstwę po drugiej stronie działają siły równe tamtych i przeciwnie skierowane zgodnie z III prawem dynamiki. Całkowitą siłę działającą na rozpatrywany wycinek płaszczyzny oznaczmy przez $\vec{Q}$ ze wskaźnikiem oznaczającym zewnętrzną normalną do tej płaszczyzny, jako granicy obszaru. Np. $\vec{Q}_x$ /albo $\vec{Q}_1$ / oznacza wektor sił działających na dany wycinek S płaszczyzny prostopadłej do osi Ox . Dzieląc siłę $\vec{Q}_x$ przez pole powierzchni wycinka S otrzymujemy średnie naprężenie:

$$\vec{P}_{\text{śr}} = \frac{\vec{Q}_x}{S}, \quad /1.1/$$

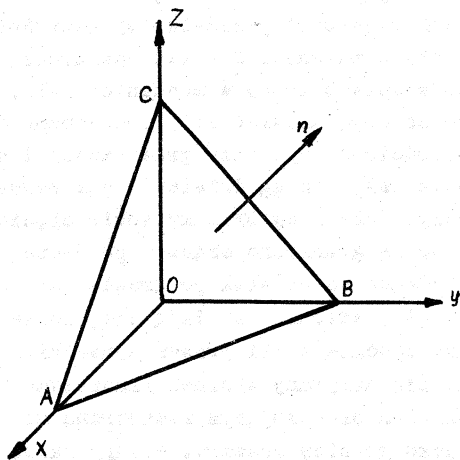
a przy przejściu do granicy przy $S \rightarrow 0$ znajdujemy naprężenie lokalne $\vec{P}_x$:

$$\vec{P}_x = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\vec{Q}_x}{S} \quad /1.2/$$

Można rozłożyć $\vec{P}_s$ na trzy składowe w kierunkach osi współrzędnych dla dowolnego kierunku $\underline{s}$:

$$\vec{P}_s = (P_{sx}, P_{sy}, P_{sz}). \quad /1.3/$$

Weźmy w ośrodku mały czworościan, którego trzy ściany są prostopadłe do osi współrzędnych, a czwarta przecina je dowolnie i ma normalną zewnętrzną $\underline{n}$. Dla uproszczenia niech początkiem układu współrzędnych będzie wierzchołek czworościanu OABC /rys. 1/.



Rys. 1. Elementarny czworościan ośrodka poddany naprężeniom

Na ścianę ABC o polu S działa siła $\vec{Q}_n$. Na ścianę OCB działa siła $-Q_x$, gdyż na przylegający do niej pozostały ośrodek w tym miejscu działa siła $+Q_x$ /zwrot normalnej w dodatnim kierunku Q_x /. Podobnie na OAC działa siła $-Q_y$, a na OBA $-Q_z$.

Łącznie z siłą objętościową F jest równowaga:

$$\vec{F} + \vec{Q}_n - \vec{Q}_x - \vec{Q}_y - \vec{Q}_z = 0 \quad /1.4/$$

Siły powierzchniowe można zapisać przy pomocy naprężeń i pól powierzchni ścian, więc otrzymamy:

$$\vec{F} + \vec{P} - \vec{P}_x \cos \alpha - \vec{P}_y \cos \beta - \vec{P}_z \cos \gamma = 0 \quad /1.5/$$

gdzie:

$$\alpha = \angle(n, x), \quad \beta = \angle(n, y), \quad \gamma = \angle(n, z)$$

Przy zmniejszaniu rozmiaru czworościanu do zera z zachowaniem kątów, pierwszy wyraz zniknie wobec $V \rightarrow 0$ i w granicy otrzymamy w rzutach na kierunki x, y, z :

$$\begin{aligned} P_{nx} &= P_{xx} \cos \alpha + P_{yx} \cos \beta + P_{zx} \cos \gamma \\ P_{ny} &= P_{xy} \cos \alpha + P_{yy} \cos \beta + P_{zy} \cos \gamma \\ P_{nz} &= P_{xz} \cos \alpha + P_{yz} \cos \beta + P_{zz} \cos \gamma \end{aligned} \quad /1.6/$$

Te trzy równości można napisać tensorowo, zastępując w ogólnie przyjęty sposób wskaźniki x, y, z odpowiednio wskaźnikami 1, 2, 3:

$$\vec{P}_n = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{21} & P_{31} \\ P_{12} & P_{22} & P_{32} \\ P_{13} & P_{23} & P_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{bmatrix} = [P_{ik}] \vec{e}_n \quad /1.7/$$

Aby pokazać, że macierz P_{ik} jest tensorem, należałoby udowodnić, że jej współrzędne przy zmianie układu transformują się zgodnie z odpowiednimi regułami:

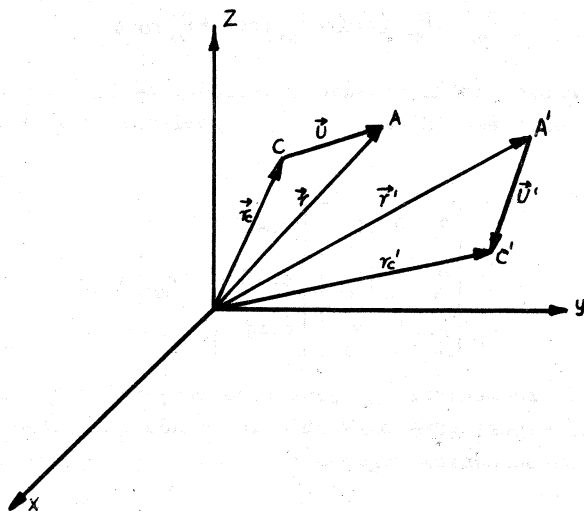
$$T_{i'j'...n'} = \alpha_{i'p} \alpha_{j'q} \dots \alpha_{n'u} T_{pq...u}. \quad /1.8/$$

W naszym przypadku wystarczy skorzystać z twierdzenia /19/, że jeśli zespół elementów macierzy przy zmianie układu współrzęd-

nych przekształca się tak, iż dany wektor $/ \vec{e}_n /$ zawsze przechodzi w określony wektor $/ \vec{p}_n /$, to macierz jest tensorem o walencji 2.

Z równania /1.7/ wynika, że naprężenie $\vec{p}_n$ działające w dowolnym punkcie ośrodka na element powierzchni o danej orientacji n określone jest w zupełności przez dziewięć współrzędnych tensora stanu naprężenia.

Przy definiowaniu tensora odkształcenia zakłada się, że przemieszczenia punktów ośrodka są małe, tzn. gdy "punkty" materialne ośrodka ciągłego przesuwają się, warunki ciągłości wymagają, aby odległości nieskończenie bliskich punktów pozostały po przemieszczeniu nieskończenie małe. Rozpatrzmy dowolny punkt C ośrodka, uważając go za centralny dla pewnego jego otoczenia.



Rys. 2. Stan dowolnego odkształcenia w ośrodku

Położenie punktu C dane jest przez współrzędne w pewnym nieruchomym układzie współrzędnych Oxyz, czyli przez wektor wodzący $\vec{OC} = \vec{r}_c$. Punkty otoczenia mają wektory wodzące:

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \vec{r}_c + \vec{U}, \\ \vec{U} &= \vec{U}_1 + \vec{U}_2 + \vec{U}_3.\end{aligned}\quad /1.9/$$

/na rys. 2 takim punktem jest A/. U_1, U_2, U_3 są lokalnymi współrzędnymi w układzie $\mathcal{L}_{u_1 u_2 u_3}$ z osiami równoległymi do stałych osi Oxyz. Kiedy ośrodek odkształci się, punkt centralny C przejdzie w położenie C' , $\vec{OC}' = \vec{r}'_c$, zaś punkt A będzie teraz A' . Oznaczmy $\vec{OA}' = \vec{r}'$, $\vec{C'A}' = \vec{U}'$. Wektor $\vec{U}'$ będzie teraz wyznaczał nowowzględne położenie punktu A.

Mamy więc:

$$\vec{r}' = \vec{r}'_c + \vec{U}' \quad /1.10/$$

Oznaczamy skończone przemieszczenia punktów symbolem Δ .

Wówczas:

$$\begin{aligned}\vec{CC}' &= \Delta \vec{r}_c, \quad \vec{AA}' = \Delta \vec{r}, \quad \vec{U}' - \vec{U} = \Delta \vec{U} = \\ &= (\vec{r}' - \vec{r}'_c) - (\vec{r} - \vec{r}_c) = (\vec{r}' - \vec{r}) - (\vec{r}'_c - \vec{r}_c) = \Delta \vec{r} - \Delta \vec{r}_c.\end{aligned}\quad /1.11/$$

Wektor $\Delta \vec{U} = \Delta U_1 \vec{i} + \Delta U_2 \vec{j} + \Delta U_3 \vec{k}$ zależy teraz od x_c, y_c, z_c przyjętych jako stałe oraz od U_1, U_2, U_3 . Przy małych wartościach lokalnych współrzędnych /warunki ciągłości/ możemy $\Delta \vec{U}$ i jego składowe przedstawić jako rozwinięcie w szereg potęgowy Taylora różnic $\Delta x - \Delta x_c, \dots$ względem $\Delta \vec{r} - \Delta \vec{r}_c$ z ograniczeniem się do pierwszych potęg:

$$\begin{aligned}\Delta U_1 &= \Delta x - \Delta x_c = \frac{\partial \Delta x}{\partial x} U_1 + \frac{\partial \Delta x}{\partial y} U_2 + \frac{\partial \Delta x}{\partial z} U_3, \\ \Delta U_2 &= \Delta y - \Delta y_c = \frac{\partial \Delta y}{\partial x} U_1 + \frac{\partial \Delta y}{\partial y} U_2 + \frac{\partial \Delta y}{\partial z} U_3, \\ \Delta U_3 &= \Delta z - \Delta z_c = \frac{\partial \Delta z}{\partial x} U_1 + \frac{\partial \Delta z}{\partial y} U_2 + \frac{\partial \Delta z}{\partial z} U_3.\end{aligned}\quad /1.12/$$

Wzory te można zapisać tensorowo, gdyż zespół dziewięciu wielkości:

$$T_{ik} = \frac{\partial \Delta x_i}{\partial x_k}, \quad (x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z). \quad /1.13/$$

tworzy tensor /Karaśkiewicz /19//:

$$\Delta \vec{U} = [T_{ik}] \vec{U}. \quad /1.14/$$

Przy pomocy przekształcenia Cauchy'ego można T_{ik} rozłożyć na część symetryczną i antysymetryczną:

$$\begin{aligned} \Delta U_1 &= \varepsilon_{11} U_1 + \varepsilon_{12} U_2 + \varepsilon_{13} U_3 + \frac{1}{2} (\text{rot} \Delta \vec{r} \times \vec{U})_x \\ \Delta U_2 &= \varepsilon_{21} U_1 + \varepsilon_{22} U_2 + \varepsilon_{23} U_3 + \frac{1}{2} (\text{rot} \Delta \vec{r} \times \vec{U})_y \\ \Delta U_3 &= \varepsilon_{31} U_1 + \varepsilon_{32} U_2 + \varepsilon_{33} U_3 + \frac{1}{2} (\text{rot} \Delta \vec{r} \times \vec{U})_z, \end{aligned} \quad /1.15/$$

$$\text{gdzie:} \quad \varepsilon_{ik} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Delta x_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \Delta x_k}{\partial x_i} \right) = \varepsilon_{ki} \quad /1.16/$$

Całkowita zmiana położenia punktów z otoczenia punktu C składa się ostatecznie z trzech ruchów:

1/ przeniesienie C w położenie C' i wraz z nim postępowe przeniesienie otoczenia - nie zmienia lokalnych wektorów $\vec{U}$,

2/ zmiana $\Delta \vec{U}$ wyrażona symetrycznym tensorem odkształcenia:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix}, \quad /1.17/$$

3/ zmiana opisana antysymetrycznym tensorem obrotów:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Delta x_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \Delta x_k}{\partial x_i} \right) \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} \equiv [\omega_{ik}] \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} (\text{rot } \Delta \vec{r} \times \vec{U}), \quad /1.18/$$

gdzie: $i, k = 1, 2, 3$.

Mając dany tensor odkształcenia można próbować wyznaczać wektor przemieszczeń $\vec{U}(x_1, x_2, x_3)$. Sokolnikoff /40/ podaje następujące wzory Cesaro:

$$U_i(x_1, x_2, x_3) = U_i^0 + (x_p - x_p^0) \omega_{ip}^0 + \int_{p_0}^p U_{ip} d\xi_p, \quad /1.19/$$

$$U_{ij} = \xi_{ij} + (x_q - \xi_q) (\xi_{ij,q} - \xi_{qi,l}),$$

gdzie:

$$U_i^0, \omega_i^0 = U_i, \omega_i(x_c, y_c, z_c), \quad \xi_{ab,d} \equiv \frac{\partial \xi_{ab}}{\partial x_d} \quad /1.20/$$

Aby rozwiązanie było jednoznaczne, całka krzywoliniowa nie może zależeć od drogi całkowania, co daje równania nierozdzielności odkształceń:

$$\xi_{ij,k} + \xi_{ki,l} - \xi_{ik,j} - \xi_{jl,i} = 0 \quad /1.21/$$

W warunkach równowagi, żądając aby suma momentów sił była równa zero, można pokazać, że naprężenia i odkształcenia opisane są symetrycznymi częściami tensorów wprowadzonych wyżej, posiadającymi sześć niezależnych składowych. Z warunków równowagi sił działających na elementarny prostopadłościan można w podobny sposób wyprowadzić równania równowagi wewnętrznej, które w przypadku braku sił masowych daje się zapisać /korzysta-

tając z umowy sumacyjnej Einsteina/ w zwartej postaci:

$$P_{ij,j} = 0 \quad /1.22/$$

Love /24/ nazywa jednorodnymi stanami odkształceń takie stany, gdzie przemieszczenia są liniowymi funkcjami współrzędnych:

$$U_1 = a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + a_{13} X_3 + a_{01}$$

$$U_2 = a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + a_{23} X_3 + a_{02} \quad /1.23/$$

$$U_3 = a_{31} X_1 + a_{32} X_2 + a_{33} X_3 + a_{03}.$$

Charakterystyka tych stanów jest następująca:

- a/ pierwotnie proste linie pozostają po odkształceniu prostymi, równoległe zaś równoległymi,
- b/ wszystkie proste o tym samym kierunku skracają się /wydłużają/ w tym samym stosunku,
- c/ istnieją trzy wzajemnie prostopadłe proste, pozostające prostopadłymi do siebie po odkształceniu, choć kierunki ich mogą ulec zmianie.

Stany jednorodne odgrywają zasadniczą rolę w doświadczalnym określaniu reologicznych cech materiałów. Aby znaleźć wspomniane wyżej proste /punkt C/, a przy okazji stwierdzić, że każdy stan odkształceń da się przedstawić jako stan trzech wydłużeń, rozwiążmy równanie:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{21} & \epsilon_{31} \\ \epsilon_{12} & \epsilon_{22} & \epsilon_{32} \\ \epsilon_{13} & \epsilon_{23} & \epsilon_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \end{bmatrix}. \quad /1.24/$$

Lewa jego strona jest wyznacznikiem utworzonym ze składowych odkształceń, prawa zaś - wyznacznikiem utworzonym z jednej z poszukiwanych składowych. Po uwzględnieniu symetrii otrzymujemy stąd:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} - \varepsilon, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12}, \varepsilon_{22} - \varepsilon, \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{33} - \varepsilon \end{bmatrix} \equiv \varepsilon^3 - J_1 \varepsilon^2 - J_2 \varepsilon - J_3 = 0. \quad /1.25/$$

Z tego równania otrzymuje się trzy główne skrócenia $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$. Kierunki głównych osi odkształcenia można otrzymać z równań:

$$\begin{cases} (\varepsilon_{11} - \varepsilon_1) l_1 + \varepsilon_{12} l_2 + \varepsilon_{13} l_3 = 0 \\ \varepsilon_{12} l_1 + (\varepsilon_{22} - \varepsilon_1) l_2 + \varepsilon_{23} l_3 = 0 \\ l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 1. \end{cases} \quad /1.26/$$

Tutaj l_1, l_2, l_3 są cosinusami kierunkowymi odkształcenia głównego ε_1 względem osi x_1, x_2, x_3 . Z podobnych równań można otrzymać cosinusy kierunkowe dla ε_2 i ε_3 . Analogicznie można sprowadzić tensor naprężenia do kierunków głównych. Tensory naprężeń i odkształceń rozkładają się na część izotropową:

$$T_o = \frac{1}{3} (T_{11} + T_{22} + T_{33}), \quad /1.27/$$

oraz dewiatorową:

$$T_{ik} = T_{ik} - T_o \delta_{ik} \quad /1.28/$$

Skutkiem działania dodatniego naprężenia izotropowego jest wszechstronne jednakowe ściskanie, działanie zaś dewiatora naprężeń daje ścinanie.

2. TERMODYNAMICZNE PODSTAWY REOLOGICZNYCH MODELI I RÓWNAŃ STANU

Między działającymi na ciało siłami a odkształceniami istnieją związki fizyczne, które są koniecznością wynikającą z praw fizyki: praw zachowania masy, energii, pędu, momentu pędu, praw termodynamiki itd. Termodynamiczne aspekty zagadnień ujęte są w pracach /4-6, 9/. Związki te łączą takie wielkości, jak temperatura, przyspieszenie, prędkość, przemieszczenie, moduł sprężystości, lepkość itd., i nazywają się równaniami stanu. Noll, Coleman i Perzyna /5, 6/ nazywają układ ośmiu funkcji opisujących stan układu procesem termodynamicznym:

$$\{x, T, b, \varepsilon, n, \mathcal{V}, q, r\}, \quad /2.1/$$

jeśli jest zgodny z prawami zachowania pędu i energii.

Funkcje te są:

- T - symetryczny tensor naprężenia,
- b - wektor sił masowych,
- ε - właściwa energia wewnętrzna,
- $\mathcal{V}$ - lokalna temperatura bezwzględna,
- q - wektor strumienia ciepła,
- r - prędkość zmian energii promieniowania,
- n - właściwa entropia.

Funkcje b i r mogą być określone z wyżej wymienionych praw zachowania. W reologii interesują nas takie procesy termodynamiczne, w których przeważającą rolę odgrywają tensory naprężeń i odkształceń. Wielkości te można uwypuklić, jeśli zapiszemy reologiczne równanie stanu w postaci /20/:

$$\delta_{ik} - \delta_o \delta_{ik} = \left(\varepsilon_{ik} - \varepsilon_o \delta_{ik} \right) \Psi \left(\delta, \dot{\delta}, \varepsilon, \dot{\varepsilon}, x_i, T^o \right), \quad /2.2/$$

lub

$$\xi_{ik} - \xi_0 \delta_{ik} = (\delta_{ik} - \delta_0 \delta_{ik}) \Phi(\delta, \dot{\delta}, \varepsilon, \dot{\varepsilon}, x_i, T^0), \quad /2.3/$$

gdzie oznaczono:

Ψ - uogólniona funkcja relaksacji,

ϕ - uogólniona funkcja pełzania,

δ_{ik} - tensor naprężenia,

ξ_{ik} - tensor odkształcenia,

δ_{ik} - tensor jednostkowy, zwany też deltą Kroneckera,

x_i - współrzędne punktu ciała,

T^0 - temperatura bezwzględna.

Fenomenologiczny opis własności ciała, jaki uzyskujemy z rozważań opartych na prawach termodynamiki procesów nieodwrotnych, jest spowodowany niemożliwością badania zmian wszystkich parametrów i związków wzajemnych między nimi. Ponadto szereg parametrów wpływających na stan ciała nie podlega obserwacji. Ich wpływ jest sumarycznie ujęty przez zmiany parametrów podlegających obserwacji. Pozwala to wyciągnąć pewne wnioski dotyczące charakteru równań opisujących stan mechaniczny ciała i uzasadnić wybrane modele zachowania się równań na gruncie termodynamiki procesów nieodwrotnych.

W celu wyprowadzenia mechanicznych równań stanu zapiszemy I zasadę termodynamiki za pomocą funkcji zmiennych mechanicznych:

$$\dot{W}_p + \dot{W}_k + T\dot{S} = \dot{L}_e, \quad /2.4/$$

gdzie: W_p i W_k są odpowiednio energią potencjalną i kinetyczną,

$$S = \int \frac{Q^{el}}{T} \text{ jest entropią,} \quad /2.5/$$

L_e jest pracą sił zewnętrznych, a kropki oznaczają pochodne odpowiednich wielkości po czasie.

Dla przemiany adiabatycznej określonej równaniem:

$$\dot{Q} = 0, \quad /2.6/$$

równanie stanu ma postać:

$$\dot{W}_p + \dot{W}_k = \dot{L}_e, \quad /2.7/$$

więc praca sił zewnętrznych zmienia się całkowicie na energię kinetyczną i potencjalną. W przemianie izotermicznej $T = \text{const.}$ i możemy równanie stanu zapisać:

$$\dot{W}_k + \dot{W}_p + \dot{W}_d = \dot{L}_e, \quad /2.8/$$

gdzie:

$$W_d = TS. \quad /2.9/$$

jest energią rozproszoną i zgodnie z II zasadą termodynamiki:

$$\dot{W}_d \geq 0. \quad /2.10/$$

Dla określenia funkcji W_p i W_d musimy znać poza masą i zmiennymi określającymi W_k dodatkowe własności mechaniczne ciała i musimy te funkcje rozważać łącznie. Można równania stanu wyrazić jawnie jako funkcje zmiennych mechanicznych. Praca sił zewnętrznych w czasie dt wyrazi się wzorem:

$$dL_e \equiv \underbrace{\iiint_{(V)}}_{(V)} (p_x dU_1 + p_y dU_2 + p_z dU_3) dV + \underbrace{\iint_{(S)}}_{(S)} (p_x dU_1 + p_y dU_2 + p_z dU_3) dS. \quad /2.11/$$

V - oznacza całą objętość ciała, S - jego powierzchnię, x, y, z - osie współrzędnych, p_x, p_y, p_z - składowe sił masowych odniesionych do jednostki objętości ciała, p_x, p_y, p_z - składowe sił powierzchniowych, U_1, U_2, U_3 - przemieszczenia odpowiednio wzdłuż osi x, y, z . Skorzystajmy z równań ruchu, które

uzyskuje się z warunków równowagi wewnętrznej /11/ w postaci:

$$\sigma_{ik,k} + p_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad /2.12/$$

gdzie

$$i, k=1, 2, 3, \quad \sigma_{ik,k} \equiv \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}. \quad /2.13/$$

Można te równania uzyskać przy pomocy rachunku wariacyjnego /11/. Zmieniając na mocy twierdzenia Greena drugą całkę we wzorze /2.11/ z całki rozciągniętej na powierzchnię ciała na całkę po jego objętości otrzymujemy przy pomocy /2.12/ wzór na przyrost pracy sił zewnętrznych w czasie dt :

$$\begin{aligned} dL_e = & \iiint_{(V)} \left(\sigma_{xx} d\epsilon_{xx} + \sigma_{yy} d\epsilon_{yy} + \sigma_{zz} d\epsilon_{zz} + \right. \\ & \left. + 2\sigma_{xy} d\epsilon_{xy} + 2\sigma_{yz} d\epsilon_{yz} + 2\sigma_{xz} d\epsilon_{xz} \right) dV + \quad /2.14/ \\ & + \rho \iiint_{(V)} \left(\frac{d^2 u_1}{dt^2} + \frac{d^2 u_2}{dt^2} + \frac{d^2 u_3}{dt^2} \right) dV, \end{aligned}$$

gdzie równania ruchu spełniają warunki brzegowe:

$$\begin{aligned} P_x &= \sigma_{xx} \cos(x, n) + \sigma_{xy} \cos(y, n) + \sigma_{xz} \cos(z, n) \\ P_y &= \sigma_{yx} \cos(x, n) + \sigma_{yy} \cos(y, n) + \sigma_{yz} \cos(z, n) \\ P_z &= \sigma_{zx} \cos(x, n) + \sigma_{zy} \cos(y, n) + \sigma_{zz} \cos(z, n), \end{aligned} \quad /2.15/$$

natomiast $\cos(x, n)$, $\cos(y, n)$, $\cos(z, n)$ są cosinusami kątów, jakie tworzy normalna zewnętrzna do brzegu ciała z odpowiednimi osiami współrzędnych. Pierwsza z całek we wzorze /2.14/ jest pracą sił wewnętrznych, a druga jest przyrostem energii

kinetycznej przy stałej gęstości ciała. Mamy więc:

$$dL_e = dL_w + dW_k, \quad /2.16/$$

lub porównując z /2.8/:

$$\dot{L}_w = \dot{W}_p + \dot{W}_d \quad /2.17/$$

Praca sił zewnętrznych zmienia się więc na energię potencjalną i rozproszoną. Zdolność do rozpraszania energii jest więc cechą wewnętrzną ciała. Energia kinetyczna ulega we wnętrzu ciała na skutek wpływu czynników zewnętrznych zamianie na energię potencjalną i dopiero zgodnie z równaniem /2.17/ energia kinetyczna może ulegać rozproszeniu. Pokażemy obecnie, że wychodząc z liniowej termodynamiki procesów nieodwracalnych można uzasadnić fizycznie przyjęte dalej reologiczne równania stanu i modele im odpowiadające.

Wyjdziemy z zasady Onsagera /20/, która mówi, że jeżeli w rozważanym procesie termodynamicznym odbywa się n procesów skoniugowanych, a źródło entropii wyraża się wzorem:

$$\dot{S} = \sum_{k=1}^n X_k J_k, \quad /2.18/$$

i jeżeli procesy są dostatecznie powolne, tak aby je można było uznać za liniowe, to współczynniki L_{kj} w równaniu

$$J_k = \sum_{j=1}^n L_{kj} X_j, \quad (j, k = 1, 2, \dots, n) \quad /2.19/$$

są symetryczne. W powyższych równaniach: L_{kj} są parametrami stanu, n jest liczbą procesów, J_k - przepływami, X_j - bodźcami. Symetria L_{kj} pozwala na napisanie związków odwrotnych:

$$X_k = \sum_{j=1}^n P_{jk} J_j, \quad (j, k = 1, \dots, n) \quad /2.20/$$

i teraz bilans entropii /2.18/ wyrazi się wzorem:

$$\dot{S} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n p_{jk} J_j J_k, \quad /2.21/$$

gdzie:

$$p_{jk} = [L_{kj}]^{-1}.$$

W procesie mechanicznym rolę bodźców X_k pełnią siły uogólnione P_k , a przepływami są prędkości uogólnionych przemieszczeń q_j . Przy pomocy zmiennych mechanicznych wyrażenie /2.21/ będzie opisywać moc rozproszoną /prędkość rozpraszania energii/ dla procesu nieodwracalnego:

$$T\dot{S} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n p_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k. \quad /2.22/$$

W dowolnym rzeczywistym procesie mechanicznym zachodzi zarówno magazynowanie jak i rozpraszanie energii. Całkowity bilans w rzeczywistym procesie mechanicznym wymaga więc dodania wyrażenia na moc zmian energii w procesie odwracalnym. Ponieważ w procesie odwracalnym

$$\dot{E} = \dot{L} = \sum_{k=1}^n p_k q_k, \quad /2.23/$$

więc korzystając z poprzedniego założenia o liniowości procesu możemy napisać:

$$p_k = \sum_{j=1}^n C_{jk} q_j \quad /2.24/$$

i ostatecznie:

$$\dot{E} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n C_{jk} q_j \dot{q}_k. \quad /2.25/$$

Wyrażenie /2.25/ oznacza prędkość zmian energii w procesie od-

wracalnym. Całkowity bilans energii w rzeczywistym procesie mechanicznym będzie sumą wyrażeń /2.22/ i /2.25/:

$$\dot{E} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \left(C_{ik} q_i + p_{ik} \dot{q}_i \right) \dot{q}_k. \quad /2.26/$$

Różniczkując $\dot{E}$ względem zmiennej q_k dla ustalonego k otrzymujemy

$$\frac{\partial \dot{E}}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{i=1}^n \left(p_{ik} \dot{q}_i + C_{ik} q_i \right) \equiv P_k, \quad /2.27/$$

gdzie P_k jest siłą uogólnioną.

Wyrażenie
$$P_k = \sum_{i=1}^n C_{ik} q_i \quad /2.28/$$

opisuje związek liniowo sprężysty, czyli model ciała Hooke'a,

podczas gdy równość
$$P_k = \sum_{i=1}^n p_{ik} \dot{q}_i \quad /2.29/$$

jest związkiem liniowo-lepkim dla modelu cieczy Newtona. Związki powyższe jak i bardziej ogólne rozważania dotyczące relaksacji przedstawione są w pracach /4, 9, 20/. Biot /4/ oraz Derski i Ziemia /9/ drogą rozważań podobnych do powyższych analizując związek /2.27/ pokazują, że temu równaniu odpowiada model mechaniczny znany pod nazwą ciała Kelvina-Voigta, który jest kombinacją połączeń szeregowych i równoległych elementów sprężystych i lepkich. W rezultacie jeżeli przyjmiemy, że tylko jedna współrzędna jest obserwowalna i jest to odkształcenie ξ , to temu odkształceniu musi odpowiadać siła uogólniona, która w naszym przypadku jest naprężeniem σ i równanie /2.27/ staje się rozpatrywanym dalej równaniem ciała Kelvina-Voigta:

$$\sigma = E\xi + n\dot{\xi}. \quad /2.30/$$

W ten sposób podstawowe równania opisujące wyidealizowane cia-

ła Hooke'a, Kelvina-Voigta i ciecz Newtona są uzasadnione na gruncie liniowej termodynamiki procesów nieodwracalnych. W pracy /10/ Derski wyprowadził w podobny sposób liniową teorię konsolidacji ośrodków porowatych wypełnionych cieczą i posiadających sprężysty szkielet. Związki fizyczne tej teorii podał Biot /3, 5/ na podstawie intuicji. Uzyskany wynik pokrywa się dokładnie z równaniem Biota. Derski wychodzi z równania ciągłości dla cieczy w postaci:

$$\frac{d\rho_c}{dt} + \rho_c (\dot{U}_i - \dot{u}_i), \quad i = 0, \quad /2.31/$$

gdzie

- ρ_c - oznacza gęstość cieczy w odniesieniu do jednostki objętości szkieletu i cieczy /ośrodek jest dwufazowy: szkielet + ciecz doskonała/,
- U_i - są składowymi przemieszczeń cząstek cieczy,
- u_i - są przemieszczeniami szkieletu.

Przy pomocy równania /2.31/ bilans entropii dla przepływu cieczy można napisać w postaci:

$$\dot{T}\dot{S} = \iiint_{(V)} \sigma_{,i} (U_i - u_i) dV, \quad /2.32/$$

gdzie σ jest określone związkiem:

$$T_{ij} = \sigma_{ij} + \sigma \delta_{ij}. \quad /2.33/$$

Bilans energii w procesie izotermicznym dla sprężystego szkieletu dany jest równaniem:

$$\dot{W} = \iiint_{(V)} (\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} + \sigma \dot{\theta}) dV + \iiint_{(V)} \sigma_{,i} (\dot{U}_i - \dot{u}_i) dV, \quad /2.34/$$

gdzie $\theta = U_{ii}$ jest objętościową deformacją cieczy.

Przy stałej temperaturze można z równań /2.32/ i /2.34/ uzyskać wyrażenie na swobodną energię Helmholtza:

$$\dot{F} = \dot{W} - T\dot{S} = \iiint_{(V)} (\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} + \sigma \dot{\theta}) dv. \quad /2.35/$$

Ponieważ energia swobodna zależy tylko od zmiennych niezależnych ϵ_{ij} i θ , więc dla jednostki objętości otrzymamy z powyższego:

$$\dot{F}_1 = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} + \sigma \dot{\theta}, \quad /2.36/$$

a z drugiej strony możemy napisać:

$$\dot{F}_1 = \frac{\partial F_1}{\partial \epsilon_{ij}} \dot{\epsilon}_{ij} + \frac{\partial F_1}{\partial \theta} \dot{\theta}. \quad /2.37/$$

Porównując /2.36/ i /2.37/ stwierdzamy:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial F_1}{\partial \epsilon_{ij}}, \quad \sigma = \frac{\partial F_1}{\partial \theta}. \quad /2.38/$$

Następnie można zapisać funkcję F_1 w ogólnej postaci dla izotropowego i symetrycznego ośrodka jako funkcję kwadratową zmiennych ϵ_{ij} oraz θ :

$$F_1 = a \epsilon_{ij} \epsilon_{ij} + b \epsilon_{kk} \epsilon_{kk} + c \epsilon \theta + d \theta^2, \quad /2.39/$$

skąd uzyskuje się na mocy /2.38/ żądane równania konsolidacji Biota:

$$\sigma_{ij} = 2a \epsilon_{ij} + (2b \epsilon + c \theta) \delta_{ij}; \quad \sigma = c \epsilon + 2d \theta. \quad /2.40/$$

3. MODELE REOLOGICZNE

Markus Reiner /37/ zwraca uwagę, że teorie modelowe zastępują materiał o nieznanym strukturze modelem, który zachowuje się podobnie do materiału rzeczywistego. Podobieństwo to ujawnia się szczególnie w kształcie równań. Elementy modelu /np. sprężyny, tłoki itp./ nie mają odpowiedników w rzeczywistym materiale. Haman i Zdanowicz /14/ zwracają uwagę, że /"wszystkie istniejące modele reologiczne ciał reprezentują również jedynie pewne materiały doskonałe, nie istniejące w rzeczywistości, stanowią zatem różne idealizacje matematyczne. Służą one jako ilustracja układu równań różniczkowych, opisujących własności mechaniczne ciała". Elementami, z których buduje się modele reologiczne są podstawowe parametry mechaniczne materiałów: sprężystość, lepkość i plastyczność /ponadto w niektórych modelach występują inne elementy/.

Sprężystością nazywana jest własność polegająca na tym, że zmiana tensora naprężeń towarzyszy całkowicie odwracalna zmiana tensora odkształceń. Między sześcioma niezależnymi składowymi tensora odkształceń ϵ_{ik} oraz sześcioma składowymi naprężeń σ_{ik} istnieją zależności wyrażające się w ośrodku ciągłym funkcjami ciągłymi, które można rozwinąć w szeregi potęgowe, a przy dostatecznie małych wartościach naprężeń i odkształceń można ograniczyć się do wyrażań liniowych /prawo Hooke'a/:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad ; \quad ij,kl = 1,2,3. \quad /3.1./$$

Jeśli sprężystość jest symetryczna, to

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad ; \quad \epsilon_{ij} = \epsilon_{ji} \quad ;$$

więc wobec równości:

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij},$$

tensor C_{ijkl} o walencji 4 ma zamiast 81 tylko 21 składowych niezależnych. Dla ośrodka izotropowego liczba ta redukuje się do 2 /zob. 11, 22, 40, 46/:

$$\sigma_o = C_1 \varepsilon_o, \quad \tau_{ik} = C_2 \nu_{ik}, \quad /3.2/$$

gdzie

$$\sigma_{ik} = \sigma_o \delta_{ik} + \tau_{ik}, \quad \varepsilon_{ik} = \varepsilon_o \delta_{ik} + \nu_{ik}.$$

Stałe te można wyznaczyć w przypadku prostego ściskania poprzez moduł Younga E i współczynnik Poissona ν w związkach:

$$\sigma_{11} = E \varepsilon_{11}, \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\nu \varepsilon_{11}.$$

Aby to pokazać rozłożymy tensory jak niżej:

$$\sigma_{ik} = \sigma_o \delta_{ik} + \tau_{ik} = \left\{ \left\| \begin{array}{ccc} \frac{1}{3}, & 0, & 0 \\ 0, & \frac{1}{3}, & 0 \\ 0, & 0, & \frac{1}{3} \end{array} \right\| + \left\| \begin{array}{ccc} \frac{2}{3}, & 0, & 0 \\ 0, & -\frac{1}{3}, & 0 \\ 0, & 0, & -\frac{1}{3} \end{array} \right\| \right\} \sigma_{11}$$

oraz

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_o \delta_{ik} + \nu_{ik} =$$

$$= \varepsilon_{11} \left\{ \left\| \begin{array}{ccc} \frac{1-2\nu}{3}, & 0, & 0 \\ 0, & \frac{1-2\nu}{3}, & 0 \\ 0, & 0, & \frac{1-2\nu}{3} \end{array} \right\| + \left\| \begin{array}{ccc} \frac{2}{3}(1+\nu), & 0, & 0 \\ 0, & -\frac{1}{3}(1+\nu), & 0 \\ 0, & 0, & -\frac{1}{3}(1+\nu) \end{array} \right\| \right\} \cdot /3.3/$$

Porównując /3.2/ i /3.3/ otrzymuje się:

$$C_1 \equiv 3\lambda = \frac{E}{1-2\nu} ; \quad C_2 \equiv 2G = \frac{E}{1+\nu} . \quad /3.4/$$

Współczynnik λ nazywa się modułem odkształcenia objętościowego, zaś współczynnik G modułem odkształcenia postaciowego. Ogólnie można napisać:

$$\sigma_{ik} = 3\lambda \varepsilon_o \delta_{ik} + 2G \nu_{ik} . \quad /3.5/$$

W klasycznej teorii sprężystości dla izotropowego, jednorodnego ośrodka mamy następujące równania /i, j = 1, 2, 3/:

1. trzy równania równowagi wewnętrznej:

$$\sigma_{ij,j} - p_i = \rho \ddot{u}_i ; \quad /3.6/$$

2. sześć równań geometrycznych /lub nierozdzielności odkształceń/:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{ij} + u_{ji}) ; \quad /3.7/$$

3. sześć związków fizycznych:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G} \left(\sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma_{pp} \delta_{ij} \right) . \quad /3.8/$$

Niewiadomymi są:

- 1/ sześć składowych tensora naprężenia σ_{ij} ,
- 2/ sześć składowych tensora odkształcenia ε_{ij} ,
- 3/ trzy składowe wektora przemieszczenia u_i .

Lepkość jest to opór stawiany przez ciecz rzeczywistą ruchowi wzajemnemu jej cząsteczek /warstw/. Newton założył, że opór ten - zwany oporem lepkiego płynięcia - jest wprost proporcjonalny do prędkości ruchu cząstek cieczy względem siebie

$$\tau_{ik} = 2\eta \dot{\nu}_{ik} , \quad \lambda = \infty , \quad i, k = 1, 2, 3 , \quad /3.9/$$

gdzie:

τ_{ik}, ψ_{ik} - dewiatory naprężenia i odkształcenia,

η - współczynnik lepkości,

κ - ściśliwość.

Wprowadzenie lepkości powoduje zależność stanów odkształcenia i naprężenia od czasu, zatem odpowiada zagadnieniom dynamicznym, podczas gdy modele reologiczne bez lepkości odpowiadają zagadnieniom quasistatycznym /14/. W literaturze spotyka się też inne ciecze /nienewtonowskie/ - są to ciecze ściśliwe, posiadające oprócz lepkości postaciowej także lepkość objętościową /np. ciecz Stokesa, ciecz Troutona/.

Plastycznością nazywamy trwałe odkształcenie się materiału po przekroczeniu pewnej wartości naprężeń stycznych. Poniższe równanie na największe naprężenie styczne nazywa się warunkiem plastyczności St-Venanta /zob. Kaczanow /18/, Huber /16//, zwanym też warunkiem Tresca'i /30/:

$$\sigma_{ik \max} = \frac{1}{2} (\sigma_i - \sigma_k) \equiv \Theta, \quad i \neq k, \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3, \quad /3.10/$$

gdzie

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ - są naprężeniami głównymi,

Θ - granicą plastyczności.

Hipoteza ta zakłada, że izotropowy stan naprężeń nie wpływa na osiągnięcia przez ciało stanu plastycznego. Huber przedstawił w 1904 r. hipotezę nie wymagającą tego założenia, przyjmując, że materiały mają ograniczoną zdolność do wchłaniania i magazynowania energii odkształcenia postaciowego /32/:

$$\int_0^{\Theta} \dot{W}_r dt = R_0. \quad /3.11/$$

R_0 jest ograniczoną wartością energii odkształcenia postaciowego, zaś $\dot{W}_r$ - mocą sił odkształcenia postaciowego.

Dla ciała sprężystego zachodzi związek:

$$\dot{\psi}_{ik} = \frac{1}{2G} \dot{\tau}_{ik}, \quad /3.12/$$

a więc:

$$\sum_{i,k=1}^3 \tau_{ik} \dot{\nu}_{ik} = \dot{W}_\tau = \sum_{i,k=1}^3 \frac{\tau_{ik} \dot{\tau}_{ik}}{2G}. \quad /3.13/$$

Porównując /3.11/ i /3.13/ otrzymujemy

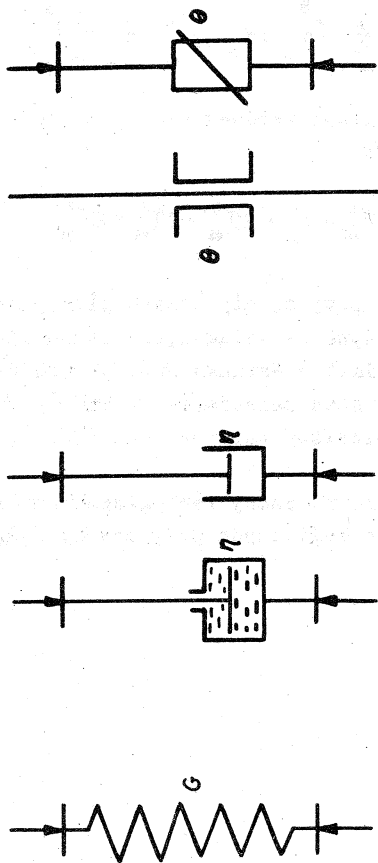
$$\int_0^{\theta} \dot{W}_\tau dt = \frac{1}{2G} \sum_{i,k=1}^3 \int_0^{\theta} \tau_{ik} d\tau_{ik} = \frac{1}{4G} \sum_{i,k=1}^3 \tau_{ik}^2 \Big|_0^{\theta}. \quad /3.14/$$

Wobec $\tau_{ik} = \tau_{ki}$ mamy poszukiwany warunek plastyczności Hubera - Misesa - Hencky'ego /30/:

$$4GR_0 = \tau_{11}^2 + \tau_{22}^2 + \tau_{33}^2 + 2\tau_{12}^2 + 2\tau_{23}^2 + 2\tau_{31}^2. \quad /3.15/$$

W obydwu przedstawionych powyżej hipotezach plastyczności ciśnienie izotropowe nie wpływa na osiągnięcie stanu plastyczności przez materiał, natomiast w warunku Hubera w odróżnieniu od St-Venanta wpływa na ten stan naprężenie główne σ_2 /16, 30/. Można jednak traktować pierwszy warunek jako dobre przybliżenie drugiego.

Omówione wyżej trzy główne cechy reologiczne materiałów oznaczają się w modelach reologicznych przy pomocy symboli /ryc. 3/.



Rys. 3. Niektóre symbole parametrów w modelach reologicznych

Przy tworzeniu modeli reologicznych obowiązują reguły łączenia poszczególnych elementów:

a/ jeśli modele połączone są szeregowo, naprężenie w każdym z nich jest takie same jak w całym modelu:

$$\sigma = \sigma_i ,$$

a odkształcenie jest sumą odkształceń poszczególnych odkształceń:

$$\varepsilon = \sum \varepsilon^i ;$$

b/ jeśli elementy modelu są równoległe, to odkształcenie każdego z nich jest takie same, jak całego modelu:

$$\varepsilon = \varepsilon^i ,$$

a naprężenie w całym modelu jest sumą naprężeń w poszczególnych jego elementach:

$$\sigma = \sum \sigma^i .$$

Niektórzy autorzy uzasadniają te reguły przy pomocy zasady superpozycji Boltzmann /47/. Ilość parametrów w modelach zmienia się od 1 do ∞ . Haman i Zdanowicz /14/ podają zestawienie niektórych modeli w tablicy, uwzględniając ilość parametrów.

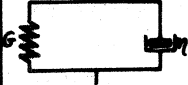
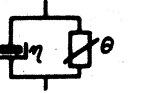
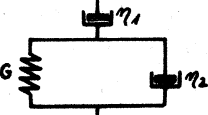
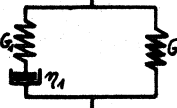
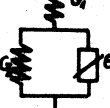
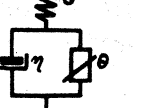
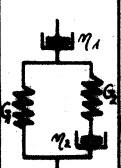
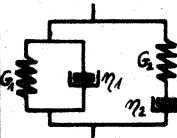
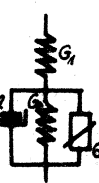
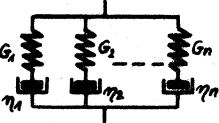
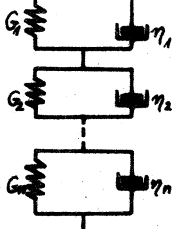
Model para materii	Ciecz	Sprężyste ciało stałe	Plastyczne ciało stałe
1	Model Newtona (1687) 	Model Hooke'a (1660) 	Model St. Venanta (1870) 
2	Model Maxwella (1868) 	Model Kelvina-Voighta (1890) 	Model Prandtlia (1924)  Model St. Venanta - Nisese (1913) 
3	Model Jeffreysa (1929) 	Model standardowy (1902) 	Model Prandtlia-Odqvista  Model Binghamma (1919) 
4	Model Truskona-Rankina (1904)  Model Burgersa (1935) 	Model K/H 	Model Schwedoffa (1900)  Model Hohenemsera-Pragera (1932)  Model M/V (1958) 
η	Uogólniony model Maxwella 	Uogólniony model Kelvina-Voighta 	
∞	Model całkowity Boltzmann (1876) Model całkowity Biot (1951)		

Tabela 1. Przykłady modeli reologicznych
wg Hamana i Zdanowicza

Najprostszymi modelami dwuparametrowymi, stanowiącymi elementy modeli bardziej złożonych, są modele cieczy Maxwella i ciała Kelvina-Voigta. Model Maxwella jest szeregowym połączeniem modelu Hooke'a i Newtona.



Rys. 4. Model cieczy Maxwella

Jeżeli odkształcenia objętościowe są sprężyste to można napisać:

$$\tau_{ik} = \tau_{ik}^G = \tau_{ik}^\eta ; \quad v_{ik} = v_{ik}^G - v_{ik}^\eta$$

oraz:

$$\tau_{ik} = 2G v_{ik}^G = 2\eta \dot{v}_{ik}^\eta, \quad /3.16/$$

co łącznie daje równanie:

$$\dot{v}_{ik} = \frac{1}{2G} \dot{\tau}_{ik} + \frac{1}{2\eta} \tau_{ik}. \quad /3.17/$$

τ_{ik} oraz ν_{ik} są odpowiednio dewiatorami naprężeń i odkształceń. Wprowadzając operator różniczkowy S w sensie Mikusińskiego i wykorzystując twierdzenie o splocie /25/ przy warunku początkowym:

$$\nu_{ik}(0) = \frac{\tau_{ik}(0)}{2G}, \quad /3.18/$$

otrzymujemy dla $\tau_{ik} = \tau_{ik}(t)$ rozwiązanie równania /3.16/:

$$\nu_{ik}(t) = \frac{1}{2\eta} \left[\frac{\eta}{G} \tau_{ik}(t) + \int_0^t \tau_{ik}(\xi) d\xi \right]. \quad /3.19/$$

W przypadku stałej deformacji:

$$\nu_{ik}(t) = \alpha = \text{const.} \quad /3.20/$$

przyłożonej w chwili $t = t_1$ można pokazać /22/, że:

$$\tau_{ik}(t) = 2G\alpha \exp\left[-\frac{t-t_1}{T}\right], \quad /3.21/$$

gdzie $T = \frac{\eta}{G}$ jest czasem, w którym naprężenia zmniejszają się e -krotnie. Model Maxwella wyjaśnia więc zjawisko relaksacji naprężeń. Można pokazać /9/, że jeżeli model poddany jest działaniu wymuszania kinematycznego:

$$\nu_{ik}(t) = \nu_{ik}^0 \sin \omega t, \quad /3.22/$$

to uzyskuje się w płaszczyźnie (τ, ν) pętlę histerezy /elipsę/, którego pole równa się energii rozproszonej w czasie jednego pełnego okresu zmiany odkształcenia.

W ośrodku Maxwella występuje również pełzanie. Jeżeli w chwili $t = 0$ przyłożymy stałe naprężenie:

$$\tau_{ik}(t) = \tau_0 = \text{const.} \quad /3.23/$$

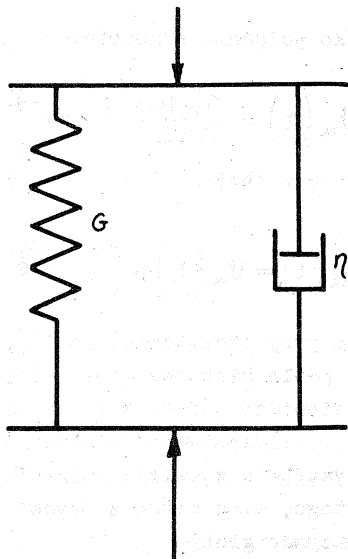
to otrzymamy zgodnie z /19/:

$$\dot{v}_{ik}(t) = \dot{v}_0 \left(1 + \frac{t}{\tau} \right), \quad /3.24/$$

tzn. odkształcenie będzie wzrastać nieograniczenie z czasem. Model Maxwella nie opisuje jednak zjawiska opóźnienia sprężystego ani odkształceń objętościowych, nie może więc być dobrym modelem dla gleby, chociaż często stanowi element bardziej złożonych modeli.

Równie popularnym elementem modeli złożonych jest dwuparametrowy model ciała Kelvina-Voigta. Równanie reologiczne stanu ciała Kelvina można w sposób analogiczny do poprzedniego modelu napisać:

$$\tau_{ik} = 2 \left(G v_{ik} + \eta \dot{v}_{ik} \right), \quad /3.25/$$



Rys. 5. Model ciała Kelvina-Voigta

Rozwiązanie równania przy pomocy operatora różniczkowania S i dla warunku początkowego:

$$\nu_{ik}(0^+) = 0 \quad /3.26/$$

ma postać:

$$\nu_{ik}(t) = \frac{1}{2G} \int_0^t \tau_{ik}(t - \xi) e^{-\frac{\xi}{T}} d\xi, \quad T = \frac{\eta}{G}. \quad /3.27/$$

W przypadku stałego naprężenia przyłożonego w chwili $t = 0$:

$$\tau_{ik} = \tau_{ik}^0 H(t), \quad /3.28/$$

gdzie:

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{gd}y \quad -\infty < x < 0 \\ 1 & \text{gd}y \quad 0 < x < +\infty \end{cases},$$

otrzymujemy zjawisko pełzania w modelu:

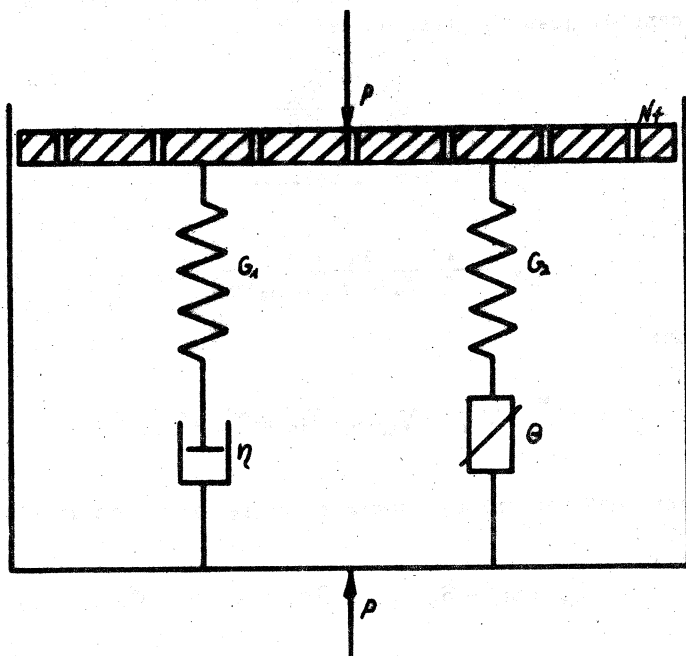
$$\nu_{ik}(t) = \frac{\tau_{ik}^0 H(t)}{2G} \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right). \quad /3.29/$$

Po zdjęciu obciążenia w chwili $t = t_1$ mamy zjawisko opóźnienia sprężystego:

$$\nu_{ik}(t) = \nu_{ik}(t_1) H(t - t_1) e^{-\frac{t-t_1}{T}}, \quad /3.30/$$

występujące zarówno przy obciążaniu, jak i przy odciążaniu modelu. W modelu tym pętla histerezy jest elipsą, podobnie jak w modelu Maxwella, natomiast nie ma w ciele Kelvina relaksacji naprężeń. Ponieważ w rzeczywistych ciałach stałych, a szczególnie w glebie, występują zjawiska pełzania, relaksacji i opóźnienia sprężystego, więc żaden z obydwu powyższych modeli nie może dobrze opisywać gleby.

Kisiel /23/ proponuje uniwersalny dla gruntów model ciała M/V . Jest on równoległym połączeniem ciała St-Venanta i modelu Maxwella:



Rys. 6. Model ciała M/V z lepkością objętościową N_f

Aby uwzględnić zjawiska konsolidacji i filtracji dodaje się do czterech parametrów tego modelu lepkość objętościową N_f . W schematach liczni autorzy używają tłoka z otworkami, zamykającego naczynie z wodą. W naczyniu umieszcza się odpowiedni model reologiczny szkieletu gruntu lub gleby. Model M/V w przypadku nie przekroczonej granicy plastyczności jest modelem standardowym /Zenera/. Model ten proponuje Tan /44/ dla ilów chińskich, dodając lepkość objętościową N_f . Gdy grunt jest nienawodniony, to dla elementu Maxwella mamy:

$$\dot{\epsilon}_{ik}^M = \frac{\tau_{ik}}{2} \left(\frac{1}{G_1} + \frac{1}{\eta_5} \right), \quad /3.31/$$

natomiast dla ciała St-Venanta /przy nie przekroczonej granicy plastyczności jest to ciało Hooke'a/:

$$\nu_{ik}^H = \frac{\tau_{ik}^2}{2G_2} \quad /3.32/$$

Równanie stanu dla ciała Zenera będzie:

$$\nu_{ik} = \frac{1}{2} \frac{G_1 + \eta S}{G_1 G_2 + (G_1 + G_2) \eta S} \tau_{ik}, \quad /3.33/$$

ponieważ:

$$\nu_{ik}^M = \nu_{ik}^H = \nu_{ik}; \quad \tau_{ik} = \tau_{ik}^1 + \tau_{ik}^2.$$

Gdy grunt jest nawodniony, wówczas uwzględniamy tensory izotropowe:

$$\tau_{ik} = \sigma_{ik} - \sigma_o \delta_{ik}; \quad \nu_{ik} = \varepsilon_{ik} - \varepsilon_o \delta_{ik} \quad /3.34/$$

oraz fakt, że woda przenosi część ciśnienia:

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ik}^{ef} + \sigma_w \delta_{ik}; \quad \sigma_o = \sigma_o^{ef} + \sigma_w, \quad /3.35/$$

gdzie:

σ_{ik} - całkowite naprężenie,

σ_w - ciśnienie przenoszone przez wodę znajdującą się w porach,

σ_{ik}^{ef} - naprężenie efektywne, tj. przenoszone w danej chwili przez szkielet gruntowy.

Wpływ wody z porów gruntu pod działaniem obciążenia odbywa się zgodnie z prawem Darcy, zachodzi więc dla kierunku X_i związek:

$$q_i = -\frac{k}{\eta_w} \sigma_{w,i}, \quad /3.36/$$

gdzie: q oznacza wydatek wody z jednostki objętości w jednostce czasu, K - współczynnik wodoprzepuszczalności gruntu - w przybliżeniu stały dla danego gruntu, η_w - lepkość wody. Zmiana objętości wody w jednostce czasu równa się zmianie objętości porów ξ , mamy więc:

$$\dot{\xi} = q_{i,i} = -\frac{K}{\eta_w} \nabla^2 \sigma_w \equiv -\frac{K}{\eta_w} \nabla^2 \sigma_w. \quad /3.37/$$

Ściśliwość objętościowa wody nie jest uwzględniona, odkształcenie objętościowe wywołane ściśliwością materiału szkieletu wymagałoby dodania składnika $-\frac{\sigma_w}{3\lambda}$. Jeśli pomija się ściśliwość szkieletu, to można napisać:

$$\xi_0 = -\frac{K}{3\eta_w} \nabla^2 \sigma_w, \quad /3.38/$$

i biorąc pod uwagę oznaczenia:

$$\chi_2 = \frac{2G_2(1+\nu)}{3(1+2\nu)}; \quad \psi_2 = \frac{G_1G_2 + (G_1+G_2)\eta_5}{G_2(G_1+\eta_5)}; \\ K_2 = \chi_2 \psi_2; \quad L_2 = G_2 \psi_2 \quad /3.39/$$

ostatecznie otrzymuje się /22, 21/:

$$\sigma_0 = 3K_2 \xi_0 + \sigma_w, \quad \sigma_{ik} = 2L_2 \xi_{ik} + \left[(3K_2 - 2L_2) \xi_0 + \sigma_w \right]. \quad /3.40/$$

Przy przekroczonej granicy plastyczności, tzn. gdy $\tau > \Theta$ należy wprowadzić opór plastyczny Θ :

$$\tau_{ik} - \Theta = 2 \frac{G_1 \eta_5}{G_1 + \eta_5} \nu_{ik} \quad \text{dla } t > t_w, \quad /3.41/$$

gdzie t_w jest chwilą przekroczenia oporu ścinania Θ . Jeżeli układ naprężeń głównych jest:

$$\sigma_{1ef} \gg \sigma_{2ef} \gg \sigma_{3ef}, \quad /3.42/$$

i jest zgodny z układem osi współrzędnych, to warunek St-Venanta można zapisać:

$$\sigma_1^v - \sigma_3^v < 2\theta \quad /3.43/$$

oraz:

$$\sigma_i^m + \sigma_i^v = \sigma_{ief}. \quad /3.44/$$

W elemencie St-Venanta panują naprężenia:

$$\begin{aligned} \sigma_1^v &= \sigma_3^v + 2\theta, \quad \sigma_1^v, \sigma_3^v \\ \sigma_0^v &= \frac{1}{3} \left(\sigma_2^v + 2\sigma_3^v + 2\theta \right). \end{aligned} \quad /3.45/$$

Ponieważ:

$$\sigma_2^v - \sigma_3^v < 2\theta, \quad /3.46/$$

więc można napisać:

$$\sigma_2^v - \sigma_3^v = 2G_2 \left(\varepsilon_2 - \varepsilon_3 \right). \quad /3.47/$$

Natomiast w elemencie Maxwella /22, 23/:

$$\varepsilon_i^m - \varepsilon_k^m = \frac{1}{2\psi_1} \left(\sigma_i^m - \sigma_k^m \right) = \varepsilon_i - \varepsilon_k, \quad /3.48/$$

$$\psi_1 = \frac{G_1 \eta_5}{G_1 + \eta_5}. \quad /3.49/$$

Korzystając z /3.44/ można napisać:

$$\begin{aligned} \sigma_1^m - \sigma_2^m &= \sigma_{ief} - \sigma_{sef} - 2\theta + \left(\sigma_2^v - \sigma_3^v \right), \\ \sigma_1^m - \sigma_3^m &= \sigma_{ief} - \sigma_{sef} - 2\theta. \end{aligned} \quad /3.50/$$

Jako trzecie równanie należy rozpatrywać związek między częściami izotropowymi tensorów. Kisiel /22/ proponuje rozwiązywać zadanie w trzech przypadkach:

- 1/ odkształcenie objętościowe wraca do stanu pierwotnego, czyli następuje rozprężenie materiału, co obserwuje się przy ścinaniu gruntów sypkich, po czym już nie ulega zmianie.

Związek izotropowy jest:

$$3 (\chi_1 + \chi_2) \varepsilon_0 = \sigma_0. \quad /3.51/$$

- 2/ objętość w chwili ścięcia nagle się zmniejsza, po czym dalej pozostaje niezmienną:

$$3 \chi_2 \varepsilon_0 = \sigma_0. \quad /3.52/$$

- 3/ objętość w chwili ścięcia nie zmienia się:

$$3 \chi_2 \psi_2 \varepsilon_0 (t_w) = 0. \quad /3.53/$$

Łącząc równania /3.51/, /3.52/ i /3.53/ z równaniami /3.50/ otrzymuje się równania stanu. Np. w trzecim przypadku:

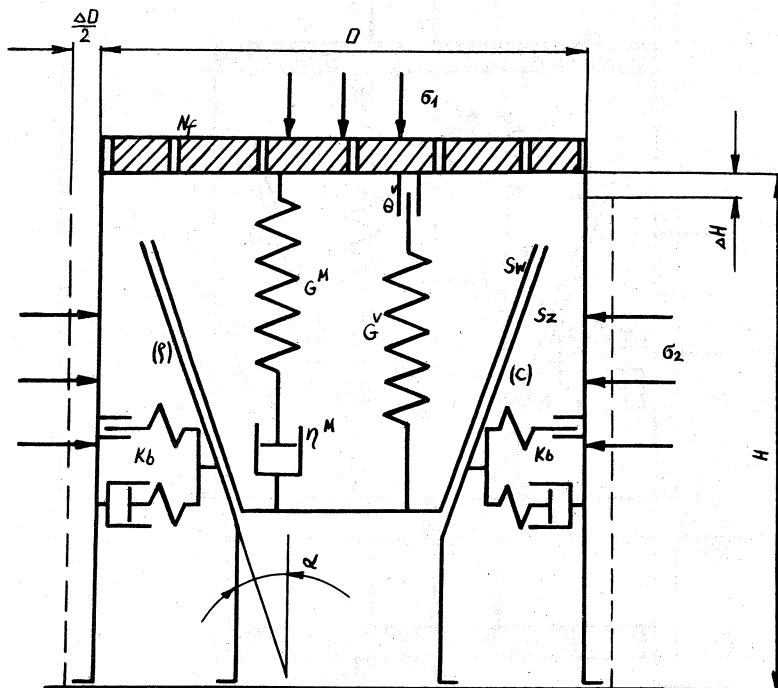
$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= 2 \psi_1 \varepsilon_1 + [3 \chi_2 \psi_2 - 2 \psi_1] \varepsilon_0 - \frac{2}{3} G_1 (\varepsilon_2 - \varepsilon_3) + \frac{4}{3} \Theta + \sigma_w \\ \sigma_2 &= 2 \psi_1 \varepsilon_2 + [3 \chi_2 \psi_2 - 2 \psi_1] \varepsilon_0 + \frac{4}{3} G_1 (\varepsilon_2 - \varepsilon_3) - \frac{2}{3} \Theta + \sigma_w \\ \sigma_3 &= 2 \psi_1 \varepsilon_3 + [3 \chi_2 \psi_2 - 2 \psi_1] \varepsilon_0 - \frac{2}{3} G_1 (\varepsilon_2 - \varepsilon_3) - \frac{2}{3} \Theta + \sigma_w \end{aligned} \right\} \quad /3.54/$$

W pracy /23/ podano także równania stanu modelu M/V w przemieszczeniach. Każdorazowo dodaje się do układów równań typu /3.54/ równanie Biota-Darcy:

$$3 \varepsilon_0 = - \frac{K}{\eta_w S} \nabla^2 \sigma_w. \quad /3.55/$$

W pracy tej pokazano też relaksację, pełzanie, opóźnienie sprężyste, konsolidację i filtrację dla gruntów w modelu M/V. Zwrócono uwagę, że możliwość opisu zachowania się różnych gruntów jednym modelem stwarza wspólną mechanikę dla różnych odmian gruntów. Zdolność do natychmiastowego odkształcenia się reprezentują w modelu M/V moduły G_1 i G_2 . Jeśli osiadanie natychmiastowe jest małe /zwarte piaski, gliny/, to suma $G_1 + G_2$ jest duża. W luźnych piaskach, namulach, słabych glinach, torfach itp., gdzie osiadanie natychmiastowe jest znaczne, suma $G_1 + G_2$ jest mała. Jeśli prędkość narastania odkształceń w czasie jest znaczna /grunty piaszczyste, pylaste/, wówczas lepkość η w modelu M/V jest mała. Odwrotnie, dla gruntów ilastych η jest duże. Gdy wartość odkształcenia w czasie znacznie przekracza odkształcenie sprężyste, wówczas G_2 jest niewielkie; gdy jest odwrotnie /w gruntach piaszczystych, żwirowych/, to G_2 jest duże. Jeśli płynięcie plastyczne występuje już przy nieznacznych obciążeniach normalnych, oznacza to że Θ jest małe /grunty ilaste miękkie, torfy/. Odwrotnie, dla zwartych piasków średnio- lub gruboziarnistych i twardych glin Θ jest duże. Kisiel wnioskuje z powyższego, że /23/ "... model M/V powinien w pierwszym przybliżeniu opisać z dostateczną dla praktycznych celów dokładnością wszystkie zasadnicze cechy gruntów, niezależnie od ich rodzaju. Różnice w wartościach liczbowych poszczególnych cech będą stanowić o przynależności klasyfikacyjnej danego gruntu".

Szwaj /38/ proponuje ulepszony model M/V dla gruntu:

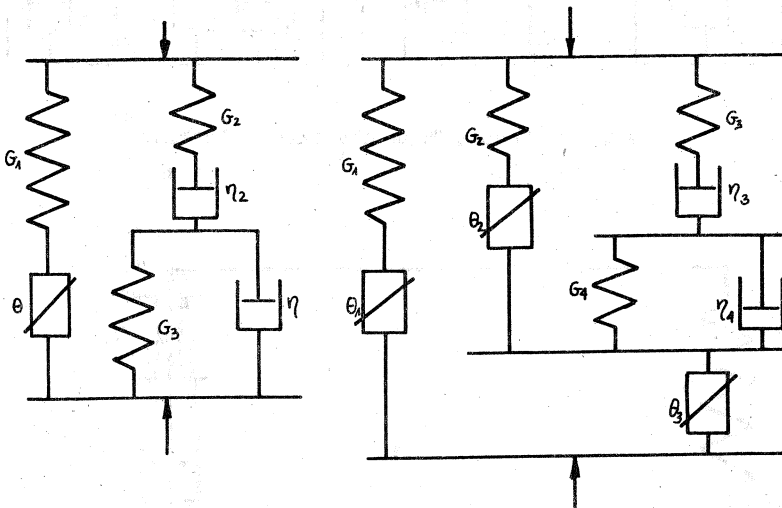


Rys. 7. Ulepszony model ciała M/V proponowany przez Szwaj

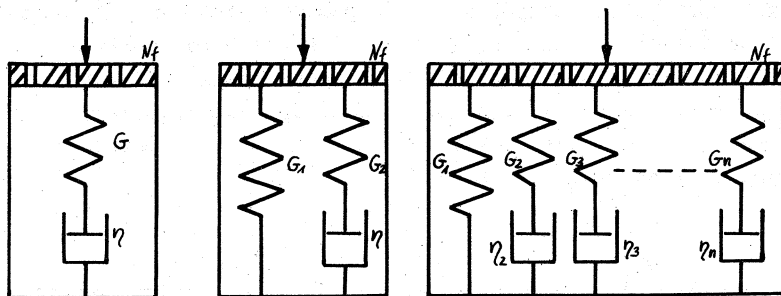
Prowadnice S_z są wykonane z dwóch różnych materiałów, aby podczas ruchu ścianek S_w tarcie na jednej odpowiadało spójności gruntu (C), a na drugiej - tarcia wewnętrznemu (φ). Elementowi Θ nadaje się odpowiedni kształt, aby zobrazować zmianę tej wielkości w czasie procesu odkształcania gruntu. Ruch wzajemny ścianek po prowadnicach powstaje w chwili odpowiadającej momentowi osiągnięcia przez grunt stanu równowagi granicznej. Model ten został rozszerzony dla przypadku trójwymiarowego przy pomocy dwuczęściowego naczynia wewnętrznego z oddzielnymi dnami B_2 , B_3 /rys. 8/.

Dwa te przesuwają się niezależnie i są połączone z dwoma przeciwległymi ścianami S_{w2} i S_{w3} , przylegającymi do dwóch par prowadnic S_{12} i S_{13} dociskanych elementami K_{b2} i K_{b3} . Dzięki przyjęciu różnych wartości parametrów G , η i Θ można opisać anizotropię i niejednorodność w gruntach, ponieważ wielkości te zależą od położenia badanego punktu i kierunku anizotropii. Model wydaje się jednak zbyt skomplikowany.

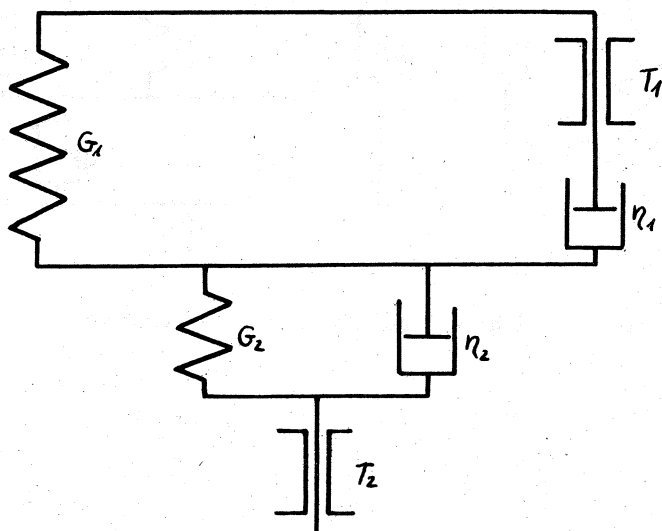
Tan /42, 44/ przedstawia modele dla ilów holenderskich /rys. 9/ i chińskich /rys. 10/.



Rys. 9. Modele Tana dla ilów holenderskich



Rys. 10. Modele Tana dla ilów chińskich



Rys. 11. Model lessów chińskich wg Dmitruka

Inny model /rys. 11/ dla lessów chińskich proponuje Dmitruk /45/, gdzie: τ_1 i τ_2 są odpowiednikami parametrów Θ_1 i Θ_2 .

Najogólniejszymi modelami będą modele całkowe. Jeżeli mamy dużą ilość elementów Maxwella połączonych równolegle a parametry sąsiednich elementów różnią się bardzo mało od siebie, to otrzymujemy /rys. 9/ funkcję relaksacji w postaci:

$$\frac{\sigma(t)}{\sigma_0} = \int_0^{\infty} \epsilon(\tau) \exp\left[-\frac{t}{\tau}\right] d\tau. \quad /3.56/$$

Podobnie dla nieskończonej liczby połączonych szeregowo elementów Kelvina-Voigta otrzymujemy funkcję pełzania:

$$\frac{\epsilon(t)}{\epsilon_0} = \int_0^{\infty} \frac{1}{E(\tau)} \left(1 - \exp\left[-\frac{t}{\tau}\right]\right) d\tau. \quad /3.57/$$

W powyższych związkach σ jest naprężeniem, ϵ - odkształceniem, E - modułem sprężystości, a $\tau = \frac{\eta}{E}$.

ZAKOŃCZENIE

Wszystkie wymienione modele mają ograniczoną stosowalność. Poza wspomnianymi ograniczeniami wynikającymi z założonej jednorodności, izotropowości itd., istotnym ograniczeniem jest zależność między częstotliwością drgań wymuszonych, a energią tłumienia drgań. W szczególności w modelu Kelvina-Voigta energia właściwa tłumienia jest wprost proporcjonalna do częstości drgań wymuszonych, natomiast w modelu Maxwella energia tłumienia jest odwrotnie proporcjonalna do częstości drgań wymuszonych /9, 14/. Tego typu proste zależności istnieją tylko dla niektórych materiałów.

Istotnym problemem jest doświadczalna weryfikacja wybranego modelu reologicznego. Reologiczne równanie stanu zapisane w postaci tensorowej

$$R = R(\sigma_{ij}, \dot{\sigma}_{ij}, \epsilon_{ij}, \dot{\epsilon}_{ij}) = 0 \quad /3.58/$$

jest słuszne tylko w nieskończenie małej objętości rozważanego ciała otaczającej badany punkt. Jednak eksperymentalnie nie jesteśmy w stanie zbadać naprężeń i odkształceń w nieskończenie małej próbce. Reiner /36/ mówi o dwóch różnych krzywych (σ - ϵ) uzyskanych przy rozciąganiu próbki stali - krzywej technicznej i reologicznej. Krzywe te pokrywają się, gdy całą próbkę poddamy jednakowemu stanowi naprężenia.

W badaniach zależności σ - ϵ dla gleb i gruntów używa się aparatów ścinania, ściskania jedno- i trójosiowego oraz różnego rodzaju plastometrów i plastwiskozyometrów. W aparatach tych stosuje się próbki o tak dopasowanych wymiarach, aby wytworzyć możliwie jednorodny stan naprężenia w próbce. Głównym źródłem błędów jest zamocowanie końców próbki /dlatego stosuje się

próbki możliwie długie/ oraz jej grubość. Dlatego najlepsze wydają się aparaty, w których próbka ma kształt cienkościennej rury. Najlepszym aparatem skonstruowanym w Polsce wydaje się aparat zbudowany w wyniku współpracy Katedry Mechaniki Gruntów i Fundamentowania Politechniki Łódzkiej i Zakładu Mechaniki Ośrodków Ciągłych IPPT PAN. Próbka rurowa ma wymiary ϕ wewnętrznego 130 mm, zewnętrzne 150 mm i wysokość $h = 167$ mm, i poddana jest obciążeniu osiowemu oraz momentowi skręcającemu przy stałym ciśnieniu hydrostatycznym. Aparat posiada ciąglą rejestrację wszystkich wielkości.

Reologia rozwinęła się głównie w mechanice teoretycznej gruntu, a w zastosowaniach praktycznych szczególnie w dziedzinie wytrzymałości materiałów i w budownictwie, dlatego też przedstawiając w pracy niektóre modele używano terminu - grunt.

Maszyny rolnicze, używane do mechanicznej obróbki gleby, sumarycznie wykonują niewspółmiernie większą pracę niż maszyny używane do celów budowlanych. Nie można też pominąć faktu, że maszyny rolnicze poruszane są pojazdami, które oddziałują swymi zespołami napędzającymi bezpośrednio na glebę. Konieczna jest zatem znajomość trakcyjnych właściwości gleby. Stwierdzono, że oddziaływanie naprężeń statycznych i dynamicznych: jednokrotnych i wielokrotnych, powoduje zupełnie inne odkształcenia w glebie. Działanie tych naprężeń wpływa w różny sposób na zmianę struktury gleby, która powinna być optymalna ze względu na jej właściwości wodno-powietrzne i mechaniczne.

Efekty uzyskiwane poprzez zabiegi agrotechniczne są w większości niekontrolowane, gdyż dotychczas brak jest teorii przewidujących zachowanie się gleby; dlatego też trudno jest konstruować i stosować odpowiednie narzędzia rolnicze. Dotychczas, by przewidzieć wyżej wymienione efekty, stosowano metody eksperymentalne, polegające na wyznaczaniu wielu współczynników. Badania prowadzono dla różnych kombinacji: pojazd ciągnący - maszyna rolnicza, a wyniki opracowywano statystycznie i na ich podstawie dokonywano optymalnego wyboru sposobu uprawy.

Należy sądzić, że teoretyczny opis własności mechanicznych gleby, tzn. tworzenie jej modeli reologicznych, może być bardzo przydatny do przewidywania efektów różnego oddziaływania naprężeń na glebę. Wynikiem tego będzie zaś wybór odpowiednie-

go sposobu obróbki mechanicznej gleby.

Ze względu na wielkie zróżnicowanie gleb nie istnieje możliwość ustalenia ich cech ogólnych, wspólnych dla wszystkich. Nie można jednak żądać od modelu, aby opisywał wszystkie szczególne przypadki zachowywania się gleby. Modele jednak spełniają właściwie swe zadania, jeżeli przyjmiemy pewną granicę dokładności opisu. Szczególnie przydatne w praktyce będą modele uniwersalne, w których eliminując poszczególne parametry można uzyskiwać modele prostsze, odpowiadające różnym szczególnym przypadkom odkształceń danego materiału. Reiner /37/ stwierdził, że "... każdy rzeczywisty materiał posiada wszystkie bez wyjątku właściwości reologiczne, aczkolwiek w różnym stopniu. Równania reologiczne ciała prostszego można uzyskać z równania reologicznego ciała bardziej złożonego przez przyrównanie do zera działania odpowiednich parametrów ciała złożonego".

Zarówno metody badawcze, jak i modele reologiczne używane w mechanice gruntu mają ograniczony zakres stosowania dla gleby. W zagadnieniach gruntoznawstwa i budownictwa występują problemy quasistatyczne, mające z punktu widzenia termodynamiki przebieg izotermiczny, natomiast obciążenia dynamiczne w glebie prowadzą raczej do procesów adiabatycznych, wskutek skończonych prędkości procesów dysypacji energii.

Metody eksperymentalne adoptowane z gruntoznawstwa muszą być modyfikowane głównie w kierunku zwiększenia zakresu prędkości odkształceń. W przedstawionej pracy używano założeń klasycznej mechaniki ośrodków ciągłych, tj. przyjmowano, że ośrodek badany jest ciągły i jednorodny, ponieważ /z wyjątkiem nielicznych prób/ wszystkie prace dotyczące mechaniki ośrodków rozdrobnionych, takich jak grunty, proszki, gleby i inne, korzystają z tych założeń, adoptując rozbudowany aparat geometrii różniczkowej w celu przedstawienia naprężeń i odkształceń w postaci tensorów, które są szczególnie wygodne w reologii. Ponieważ założenie ciągłości i jednorodności dla ośrodka glebowego jest wątpliwe, przyszłe prace teoretyczne winny iść w kierunku wyeliminowania tego założenia, np. przez wykorzystanie metod statystycznych badania histerezy naprężenie-odkształcenie oraz badań modelowych.

LITERATURA

- /1/ Angles D'Auriac P.: Definitions et principes en rheologie, Arch.Hydrotechn., 1963, 2.
- /2/ Barański W.: Additivity of mechanical power and principle of stresses, Arch.Mech.Stos., 1972, 4.
- /3/ Biot M.A.: General theory of three-dimensional consolidation, J.Appl.Phys., 1941, 12.
- /4/ Biot M.A.: Theory of stress - strain relations in anisotropic viscoelasticity and relaxation phenomena, J.Appl. Phys., 1954, 11.
- /5/ Biot M.A.: Thermoelasticity and irreversible thermodynamics, J.Appl.Phys., 1956, 29.
- /6/ Biot M.A.: Variational principles in irreversible thermodynamics with application to viscoelasticity, Phys.Rev., 1955, 97, 1463-1469.
- /7/ Coleman J.D., Russam K.: Some uses of stress and strain invariants to the thermodynamic study of soil moisture, Geotechnique, 1961, 1.
- /8/ Coleman B.D.: Thermodynamics of materials with memory, Arch.Rat.Mech.Anal., 1964, 17.
- /9/ Derski W., Ziemia S.: Analiza modeli reologicznych, PWN, Warszawa 1968.
- /10/ Derski W.: Constitutive relations in the consolidation theory, Arch.Mech.Stos., 1971, 6.
- /11/ Derski W.: Podstawy teorii sprężystości, PWN, Warszawa 1965.
- /12/ Dmitrak S.: Rozważania nad cechami lessu właściwego, Arch. Hydrotechn., 1963, 1.
- /13/ Doyle T.C., Ericson J.L.: Nonlinear elasticity, Adv.Appl. Mech., 1956, 4.

- /14/ Haman J., Zdanowicz A.: O potrzebie rozszerzania studiów nad reologią materiałów w rolnictwie, Roczn.Nauk Roln., 1968, 68-C-2, 195-217.
- /15/ Hohenemser K., Prager W.: Über die Ansätze der Mechanik Isotroper Continua, ZAAM, 1932, 4.
- /16/ Huber M.T.: Teoria plastyczności, t. 1, wyd. II, PWN, Warszawa 1954.
- /17/ Jumikins A.R.: Theoretical soil mechanics, Van Nostrand Reinhold Company 1969, New York-Toronto-London-Melbourne.
- /18/ Kaczanow Ł.N.: Miecchanika plasticzieskich sried, Gostiech-Izdat, Moskwa - Leningrad 1948.
- /19/ Karaśkiewicz E.: Zarys teorii wektorów i tensorów, wyd. II, PWN, Warszawa 1971.
- /20/ Kisiel I.: Podstawy reologii liniowej, Ossolineum, Wrocław 1971.
- /21/ Kisiel I.: Niektóre zagadnienia dynamiki proporcjonalnego podłoża reologicznego, Arch.Inż.Łąd., 1959, 4.
- /22/ Kisiel I., Lysiak B.: Zarys reologii gruntów, Arkady, Warszawa 1956.
- /23/ Kisiel I.: Zastosowanie reologicznego ciała M/V w mechanice gruntów, Ossolineum, Wrocław 1967.
- /24/ Love A.E.H.: A treatise on the mathematical theory of elasticity, ed. II, University Press Cambridge, 1906.
- /25/ Mikusiński J.: Rachunek operatorów, PWN, Warszawa 1957.
- /26/ Murayama S., Shibata T.: Flow and stress relaxation of clays, Proc.Symp.REMESO, Grenoble 1964.
- /27/ Noll W.: A mathematical theory of the mechanical behaviour of continous media, Arch.Rat.Mech.Anal., 1958, 2.
- /28/ Nowacki W.: Teoria sprężystości, PWN, Warszawa 1970.
- /29/ Olszak W., Perzyna P.: The constitutive equations for elastoviscoplastic soils, Proc.Sem.SOMEF, Łódź 1964.
- /30/ Olszak W. [i inni]: Wprowadzenie w teorię plastyczności, Warszawa 1956.
- /31/ Perzyna P.: Teoria lepkoplastyczności, PWN, Warszawa 1966.
- /32/ Perzyna P.: Termodynamiczna teoria materiałów o własnościach reologicznych, PWN, Warszawa 1966.

- /33/ Prager W.: An elementary discussion of definitions of stress rate, *Quart.Appl.Math.*, 1961, 18, 403-407.
- /34/ Prager W.: *Mechanique des solid isitropes an dela du domaine elastique*, *Memorial Sci.Math.*, 87, Paris 1937.
- /35/ Rachmatulin Ch.A., Demianow J.A.: *Procznost' pri intensiwnych kratkowremiennych nagruzkach*, *Izd.Fiz.Mat.Lit.*, Moskwa 1961.
- /36/ Reiner M.: *Deformation strain and flow*, H.K.Levis, London 1960.
- /37/ Reiner M.: *Reologia teoretyczna*, PWN, Warszawa 1958.
- /38/ Sz waj S.: *Reologiczny model przestrzenny na przykladzie osrodka gruntowego*, IV symp. PTMTS poświęcone reologii, Wrocław 1969.
- /39/ Sz waj S.: *Strenght of soil during swift deformation*, *Proc. Sem.SOMEF*, Łódź 1964.
- /40/ Sokolnikoff I.S.: *Mathematical theory of elasticity*, McGraw-Hill, New York-Toronto-London 1956.
- /41/ Tan Tiong Kie.: *Determination on the rheological and hardening parameters of cohesive soils and a new nonlinear theory of consolidation*, *Proc.Symp.REMESO*, Grenoble 1964.
- /42/ Tan Tiong Kie.: *Discussion*, *Proc.V ICOMEF*, vol.III, Paris 1961.
- /43/ Tan Tiong Kie.: *Onderzoekingen over rheologische eigenschappen van klei*, *Dissert. Excelsior*, Grawenhage, Den Haag 1954.
- /44/ Tan Tiong Kie.: *Secondary time effect and consolidation of clays*, *Acad.Sinica*, Harbin 1957.
- /45/ Truesdel C.: *The mechanical fundations of elasticity and fluid dynamics*, *J.Rat.Mech.Anal.* 1952, 1.
- /46/ Urbański W.S.: *Mechanika*, UMCS, Lublin 1966.
- /47/ Van Waser J.R., Lyons J.W. [i inni.]: *Viscosity and flow measurements /a laboratory handbook of rheology/*, Interscience Publishers, New York-London 1963.
- /48/ Wolarowicz M.P.: *Issledowanie rieologiczeskich swojstw dispieranych sistiem*, *Arch.Mech.Stos.*, 1954, 2, 171.

SPIS TREŚCI

	str.
Wstęp	1
Tensory naprężenia i odkształcenia	11
Termodynamiczne podstawy reologicznych modeli i równań stanu	20
Modele reologiczne	29
Zakończenie	52
Literatura	55