

problemy agrofizyki

POLSKA AKADEMIA NAUK · ZAKŁAD AGROFIZYKI



Ossolineum

zeszyt 30

rok 1979

**NUMERYCZNE ROZWIĄZANIA
RÓWNANIA PRZEPŁYWU WODY
W GLEBIE**

PROBLEMY AGRONOMICZNE

Wydawnictwo Naukowe
Instytut Rolnictwa i Ogrodnictwa
Państwowy Instytut Wydawniczy
ul. Chałubińskiego 1, 00-900 Warszawa

P O L S K A A K A D E M I A N A U K
ZAKŁAD AGROFIZYKI W LUBLINIE

PROBLEMY AGROFIZYKI

30

WROCLAW · WARSZAWA · KRAKÓW · GDAŃSK
ZAKŁAD NARODOWY IMIENIA OSSOLIŃSKICH
WYDAWNICTWO POLSKIEJ AKADEMII NAUK

PROBLEMY AGROFIZYKI

30

JANINA KANIEWSKA, PIOTR KOWALIK

NUMERYCZNE ROZWIĄZANIA RÓWNANIA PRZEPŁYWU WODY W GLEBIE

**WROCŁAW · WARSZAWA · KRAKÓW · GDAŃSK
ZAKŁAD NARODOWY IMIENIA OSSOLIŃSKICH
WYDAWNICTWO POLSKIEJ AKADEMII NAUK**

1979

Komitet redakcyjny

prof. dr JAN GLIŃSKI (redaktor naczelny)

prof. dr IGNACY DECHNIK, doc. dr BOGUSŁAW SZOT

Okladkę projektował ZYGMUNT ZIEMKA

Redaktor Wydawnictwa Lidia Kwiecień

Redaktor techniczny Bożena Pojasek

Copyright by Zakład Narodowy im. Ossolińskich – Wydawnictwo Wrocław 1979
Printed in Poland

PL ISSN 0137-6586

ISBN 83-04-00044-X

Zakład Narodowy im. Ossolińskich – Wydawnictwo. Wrocław 1979.
Nakład: 400 egz. Objętość: ark. wyd. 3,40, ark. druk. 4. Papier
offset. kl. III, 70 g, 61×86. Oddano do druku I.X.1979. Druk
ukończono we wrześniu 1979. Wrocławska Drukarnia Naukowa
im. Stanisława Kulczyńskiego. Zam. 218/79 – T-12. Cena zł 15.–

WSTĘP

Istotnym zagadnieniem w badaniach rolniczych jest poznanie procesów fizycznych zachodzących w glebach. Duże trudności sprawia tu fakt małej powtarzalności eksperymentów polowych. Niewielkie zmiany metod laboratoryjnych i nieduże różnice między poszczególnymi próbkami gleby mogą powodować powstawanie znacznych różnic między wynikami. Kłopoty pojawiają się także przy stwarzaniu zgodnych z założeniami teoretycznymi warunków dla określonych eksperymentów oraz przy procesach długotrwałych. W konsekwencji często istnieje potrzeba modelowego badania przebiegu procesów w glebach, między innymi z wykorzystaniem komputerów. Eksperymenty numeryczne, a zwłaszcza symulacja procesów na maszynach cyfrowych, pozwalają na odtwarzanie warunków otoczenia (w postaci zadanych odpowiednich warunków początkowych i brzegowych), na wprowadzanie do obliczeń symulacyjnych parametrów charakteryzujących właściwości fizyczne gleb. Ponadto problem długotrwałości procesu fizycznego nie jest istotny.

Równania matematyczne opisujące przepływy soli, jonów, ciepła i wody w fazie nienasyconej gleb mają rozwiązania analityczne tylko dla pewnych szczególnych i bardzo uproszczonych przypadków. W przypadku ciała porowatego (jakim jest gleba) procesy te są charakteryzowane jednoczesnymi zmianami ilości energii i masy w czasie oraz przestrzeni. Tak skomplikowane systemy są opisywane równaniami różniczkowymi cząstkowymi (lub ich układami), które są trudne do rozwiązania. Rozwój techniki komputerowej daje możliwość uzyskania rozwiązań aproksymacyjnych oraz sprawdzenia roli wybranych czynników komplikujących problem (np. histerezy). Oczywiście rozwiązywane zagadnienie musi być poprawnie postawio-

ne. Opis procesów glebowych za pomocą metod matematycznych (z zastosowaniem maszyn analogowych i cyfrowych) daje tylko pewne przybliżenie rzeczywistości ze względu na założenia, które muszą ograniczać liczbę czynników mających wpływ na dany proces.

Najważniejszymi procesami przepływu w glebach są: przenoszenie ciepła, gazów (CO_2 , O_2 , pary wodnej), wody i składników roztworów wodnych (jonów, soli, substancji organicznych). Opady atmosferyczne, parowanie, ogrzewanie czy ochładzanie poprzez oddziaływanie na powierzchnię gleby wpływają na stan termodynamiczny wewnątrz profilu glebowego powodując tam ruch wody i ciepła.

Procesy przepływowe w glebie mogą być nieodwracalne i powodować zmiany entropii, które ze względu na łączne występowanie wszystkich przepływów są sumą iloczynów niezależnych strumieni i sprzężonych z nimi sił napędowych. Podstawowym zadaniem jest ustalenie zbioru niezależnych strumieni koniecznych do scharakteryzowania wszystkich procesów przenoszenia i zidentyfikowania wywołujących je sił. Proces wyboru sił i strumieni pozwala zapisać równania określające stan gleby. Transport cieczi jest wywołwany przez gradient potencjału wody, transport ciepła przez gradient temperatury, dyfuzja jonów czy gazów podlega gradientowi stężenia. Dołączenie do równania warunków brzegowych i początkowych określa aktualny stan gleby, a rozwiązanie równań dla zadanych warunków daje możliwość opisu stanu profilu gleby w dowolnie wybranej chwili. Znajomość charakterystyk wodnych gleby umożliwia prognozowanie stanów uwilgotnienia gleby i kierowanie przebiegiem procesów przez wpływ na warunki na powierzchni gleby lub zmianę parametrów fizycznych ośrodka glebowego.

W pracy zajęto się równaniem przepływu wody w fazie ciekłej, co zostało podyktowane dwoma względami:

- I. przenoszenie ciepła i wody jest opisywane za pomocą podobnych równań i niewielkie modyfikacje umożliwiają przejście z równania dotyczącego wody do równania dotyczącego ciepła;

- II. jednym z najważniejszych czynników determinujących wzrost roślin jest woda glebowa, a ingerencja w stosunki wodne gleby poprzez drenowanie i deszczowanie jest stosunkowo łatwa do przeprowadzenia.

Problem przewidywania uwilgotnienia gleby ma wielką wagę dla rolnictwa, ponieważ konsumpcja wody przez rośliny jest warunkiem produkcji biomasy, a stały wzrost zapotrzebowania na wodę w przemyśle stwarza konieczność racjonalnej i oszczędnej gospodarki wodnej w produkcji roślinnej. Konsekwencją tego jest potrzeba poprawnego określenia elementów składowych bilansu wodnego gleb. Bada się więc wpływ różnych czynników na uwilgotnienie gleby, wyodrębnia czynniki zasadnicze i szuka związków między stanem uwilgotnienia a warunkami otoczenia. Szczególnie przydatne są tutaj metody modelowania matematycznego z wykorzystaniem maszyn cyfrowym. Modelem wyjściowym jest odpowiednie równanie różniczkowe lub układ równań różniczkowych. Rozwiązania mogą być różnie uzyskane. W pracy tej omówiono jedynie numeryczne metody rozwiązywania równania ruchu wody w glebie.

RÓWNANIE PRZEPŁYWU WODY W GLEBIE I JEGO OGÓLNE ROZWIĄZANIE NUMERYCZNE

Ośrodkiem ruchu jest układ trójfazowy, który jest charakteryzowany zmiennymi w czasie zawartościami gazu i cieczy w szkielecie zbudowanym z fazy stałej. Zawartość wody zmienia się wraz z przebiegiem infiltracji, parowania i transpiracji. Wilgotność determinuje ruchliwość fazy cieczy, jak też kierunek i wielkość wypadkowych sił napędowych działających na jednostkę masy wody. Przy założeniu, że gradienty temperatury, stężenia roztworu glebowego oraz ciśnienia fazy gazowej są równe zeru, siłą napędową przepływu wody jest gradient potencjału macierzystego i grawitacyjnego. Przyjmuje się, że siły tarcia podczas ruchu substancji są proporcjonalne do szybkości przepływu i są kompensowane przez siłę napędową. W konsekwencji jednolity przepływ substancji w kierunku działania siły jest równy iloczynowi współczynnika przewodności wodnej i siły napędowej. Wartość współczynnika przewodności hydraulicznej zależy od oporów tarcia między molekułami wody oraz siły wiązania molekuł wody i powierzchni szkieletu gleby. Te siły oporu wzrastają wraz z ubytkiem wilgoci, tj. ze wzrostem powierzchni kontaktu między glebą a wodą w stosunku do jednostki masy wody.

Teoria izotermicznego przepływu wody przez glebę [2, 34] opisuje ten przepływ za pomocą nieliniowego równania Fokkera-Plancka. Sformułowano go opierając się o warunek ciągłości i prawo Darcy'ego dla wolno poruszających się cieczy [42]:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla \left[K \nabla \phi \right]$$

gdzie:

θ - wilgotność objętościowa $[m^3 m^{-3}]$;

K - funkcja θ , współczynnik przewodności hydraulicznej gleby $[m \cdot s^{-1}]$;

ϕ - funkcja potencjału wody glebowej $[m \text{ słupa } H_2O \approx 10^{-2} \text{ hPa}]$;

t - czas $[s]$.

Pierwsze prace nad rozwiązaniem równania przepływu wody przez ośrodek porowaty w strefie nienasyconej były prowadzone przez Klute'a [22] i Philipa [29, 30]. Ze względu na niski stopień komputeryzacji szukano wtedy rozwiązań quasi-analitycznych dla szczególnie prostych systemów przepływu, tj. ograniczano problem do infiltracji cieczy do horyzontalnej, jednowymiarowej, półnieskończonej i równomiernie uwilgotnionej kolumny gleby, z dodatkowym założeniem o stałej wilgotności po stronie wejściowej, z wykluczeniem źródeł dodatnich i ujemnych wewnątrz kolumny. Takie warunki fizyczne spowodowały, że dla równania (1) podano proste warunki początkowe i brzegowe. Zarówno Klute, jak i Philip stosowali w swych rozwiązaniach transformację Boltzmanna, co umożliwiała przekształcenie równania cząstkowego do zwykłego równania różniczkowego.

Ze względu na wagę rozwiązania problemu przepływu wody w glebie w ostatnich latach ukazało się wiele publikacji, w których autorzy na podstawie znajomości charakterystyk wodnych gleby podają schematy obliczania rozkładu wilgotności przy różnych warunkach początkowych i brzegowych.

Równanie (1) dla opisu jednowymiarowego przepływu wody ma postać:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[K(\theta) \left(\frac{\partial h}{\partial x} - 1 \right) \right] \quad (2)$$

gdzie:

θ , $K(\theta)$, t - jak we wzorze (1)

x - głębokość [m] mierzona od powierzchni gleby i dodatnia ku dół;

h - ciśnienie ssące wody glebowej [m słupa $H_2O \approx 10^{-2}$ hPA].

Po określeniu współczynnika dyfuzyjności wodnej gleby jako:

$$D(\theta) = K(\theta)/C(\theta), \quad (3)$$

gdzie $C(\theta) = \partial\theta/\partial h$ jest tzw. różniczkową pojemnością wodną gleby, równanie (2) można zapisać w formie:

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[D(\theta) \frac{\partial\theta}{\partial x} \right] - \frac{\partial K}{\partial x} \quad (4)$$

lub inaczej:

$$C(\theta) \frac{\partial h}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} \left[K \frac{\partial\theta}{\partial x} \right] \quad (5)$$

gdzie $\phi = h - x$. Całkowe przekształcenie Kirchhoffa:

$$U(h) = \int_h^h K(h) dh$$

pozwała otrzymać jeszcze inną postać równania (2):

$$F(U) \cdot \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - G(U) \frac{\partial U}{\partial x} \quad (6)$$

gdzie:

$$F(U) = \frac{C(h)}{K(h)}, \quad G(U) = \frac{1}{K(h)} \frac{\partial K(h)}{\partial h}.$$

Wszystkie cytowane tu równania przepływu są nieliniowymi równaniami różniczkowymi ze zmiennymi współczynnikami. Numeryczne rozwiązanie problemu polega na stworzeniu schematu różnicowego (zbioru równań różnicowych aproksymujących podstawowe równanie różniczkowe i warunki uzupełniające: warunki początkowe i brzegowe) i zaprogramowaniu go na maszynę cyfrową.

W celu otrzymania równań różnicowych wprowadzono siatkę punktów w czasie i przestrzeni; cały profil gleby podzielono na n przedziałów $\Delta x = x_i - x_{i-1}$, zaś czas trwania procesu na przedziały $\Delta t = t^j - t^{j-1}$. Wartości funkcji w punkcie x_i w chwili t^j oznaczamy θ_i^j , jest to tzw.

funkcja siatkowa. Punkty leżące między węzłami siatki mają odpowiednio indeksy $i \pm 1/2$ lub $j \pm 1/2$. Po zastąpieniu pochodnych ilorazami różnicowymi równanie różniczkowe, np. (2), przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} (\theta_i^{j+1} - \theta_i^j) / \Delta t = & (\sigma / \Delta x^2) \left[K_{i+1/2}^{j+1/2} (\theta_{i+1}^{j+1} - \theta_i^j) - K_{i-1/2}^{j+1/2} (\theta_i^{j+1} - \theta_{i-1}^{j+1}) \right] + \\ & + \left[(1 - \sigma) / \Delta x^2 \right] \left[K_{i+1/2}^{j+1/2} (\theta_{i+1}^j - \theta_i^j) - K_{i-1/2}^{j+1/2} (\theta_i^j - \theta_{i-1}^j) \right] + \\ & + \left[K_{i+1}^{j+1/2} - K_i^{j+1/2} \right] / \Delta x. \end{aligned} \quad (7)$$

Znajomość warunków granicznych i początkowych pozwala ustalić układ n równań z n niewiadomymi.

Rodzina schematów różnicowych służących do rozwiązywania równania przepływu jest jednoparametrowa, zawiera bowiem wagę σ . Jest to liczba z przedziału $[0, 1]$ i w zależności od wartości, którą przyjmujemy dla danego schematu mamy: dla $\sigma = 0$ schemat jawny, dla $0 < \sigma \leq 1$ schemat niejawny, przy czym dla $\sigma = 1$ czysto niejawny, zaś dla $\sigma = 0,5$ schemat symetryczny. Wybór schematu narzuca pewne ograniczenia na wielkość kroku czasu Δt . Ocena jakości otrzymanego rozwiązania jest bardzo skomplikowana i w większości przypadków sprowadza się do weryfikacji eksperymentalnej lub do uproszczenia warunków granicznych równania i porównania wyników obliczeń numerycznych z wynikami uzyskanymi metodami quasi-analitycznymi [17, 19, 45].

Jak widać ze wzoru (7) do wyliczenia wartości θ dla ustalonej chwili t^j dla wszystkich x_i potrzebna jest znajomość pewnych charakterystyk wodnych gleby, których liczbowe wartości powinny być wzięte z odpowiednich pomiarów laboratoryjnych. Obliczone θ_i^j służą jako warunki początkowe dla następnej chwili i proces obliczeń jest powtarzany tak długo, jak jest to wymagane.

Opisana wyżej procedura musi być modyfikowana w zależności od charakteru postawionego zadania, ilości dostępnych informacji wykorzystanych jako dane i znajomości fizycznych właściwości gleby, w której następuje przenoszenie wody.

NUMERYCZNE CAŁKOWANIE RÓWNANIA PRZEPŁYWU DLA PROCESU INFILTRACJI ORAZ ROZMIESZCZENIA WILGOTNOŚCI PO PROCESIE INFILTRACJI

Rozwój techniki komputerowej umożliwił badanie zjawiska przepływu wody w strefie nienasyconej, z uwzględnieniem skomplikowanych zależności wiążących wilgotność z potencjałem wody glebowej, oraz zjawiska rozkładu wilgotności w profilu następującego po procesie infiltracji [57, 58]. W 1962 r. Ashcroft i współaut. [1] opublikowali jedno z rozwiązań numerycznych omawianego równania. Równanie (4) dla jednowymiarowego horyzontalnego przepływu w jednorodnym półnieskończonym ciele zostało zastąpione równaniem różnicowym o postaci:

$$\frac{\theta_j^{n+1} - \theta_j^n}{\Delta t} = \left[D(\theta_{j+1/2}^{n+1/2}) \frac{\theta_{j+1}^{n+1} - \theta_j^{n+1}}{\Delta x} - D(\theta_{j-1/2}^{n+1/2}) \frac{\theta_j^{n+1} - \theta_{j-1}^{n+1}}{\Delta x} \right] / \Delta x \quad (8)$$

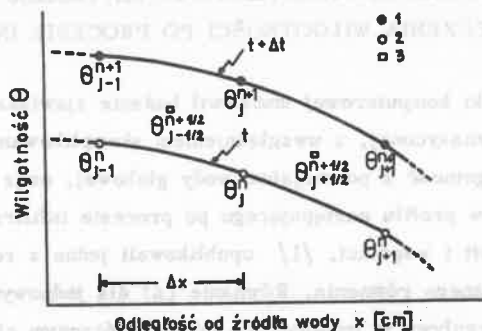
Wyraz $\partial K / \partial x$ nie występuje we wzorze (8) ponieważ rozpatrywany jest przepływ poziomy. Do równania odnoszą się warunki brzegowe i początkowe:

$$\theta_0^n = \theta_s, \quad n \geq 0, \theta_s \text{ wilgotność nasycenia,}$$

$$\theta_j^0 = \theta_j, \quad j > 0, \theta_0 \text{ wilgotność początkowa.}$$

Górny indeks n dotyczy czasu, $n = 0, 1, \dots, N$, indeks dolny j określa odległość, $j = 1, 2, \dots, k$.

W celu usunięcia nieliniowości (tj. zależności wartości $D(\theta_{j+1/2}^{n+1/2})$ od θ_j^{n+1} i od θ_{j+1}^{n+1}) autorzy [1] zaproponowali zastąpienie $\theta_{j+1/2}^{n+1/2}$ przybliżonymi wartościami $\theta_{j+1/2}^*$ określonymi jako $\theta_{j+1/2}^* = \theta_{j+1/2}^n + a$, gdzie "a" jest wybraną małą stałą, zaś $\theta_{j+1/2}^n$ jest średnią z dwóch kolejnych wilgotności: w punkcie "x" oraz w punkcie $x + \Delta x$. Na rycinie 1 przedstawiono schematyczny obraz dwóch krzywych rozkładu wilgotności w kolumnie gleby w chwili t i $t + \Delta t$. Do obliczeń przyjęto "a" równe 0,001. Zmiany te doprowadzają do liniowego układu równań:



Ryc. 1. Dwie krzywe rozkładu wilgotności: w momencie czasu t i $t + \Delta t$
 1 - wartości θ obliczone w $(n+1)$ -szym kroku czasu; 2 - wartości θ obliczone w n -tym kroku czasu; 3 - wartości oszacowane przez θ^*

$$-rD(\theta_{j-1/2}^*) \theta_{j-1}^{n+1} + \left[1 + rD(\theta_{j-1/2}^*) + rD(\theta_{j+1/2}^*) \right] \theta_j^{n+1} +$$

$$- rD(\theta_{j+1/2}^*) \theta_{j+1}^{n+1} = \theta_j^n \quad (9)$$

z $r = \Delta t / (\Delta x)^2$. Po przyjęciu oznaczeń:

$$a_1 = -rD(\theta_{j-1/2}^*)$$

$$b_1 = 1 + rD(\theta_{j-1/2}^*) + rD(\theta_{j+1/2}^*)$$

$$c_1 = -rD(\theta_{j+1/2}^*)$$

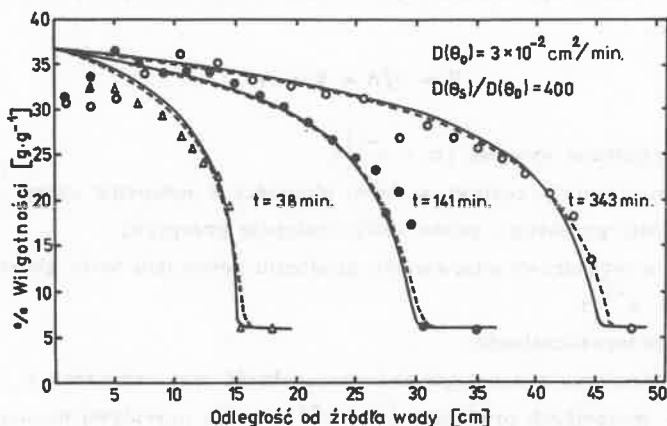
otrzymuje się układ o trójdziagonalnej macierzy:

$$\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \dots \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & \dots \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & 0 & \dots \\ \dots & & & & & \\ \dots & & a_{k-1} & b_{k-1} & c_{k-1} \\ 0 & \dots & 0 & a_k & b_k \end{pmatrix}$$

w której nie występują współczynniki a_1 i c_k , ponieważ wartości θ_0^{n+1} i θ_k^{n+1} są znane z założenia i równe odpowiednio θ_s i θ_0 .

Powyższy układ można łatwo rozwiązać metodą eliminacji Gaussa, w wyniku otrzymuje się rozkład wilgotności w kolumnie gleby. Wykorzystanie wyników jako warunku początkowego umożliwia przejście do następnego kroku względem czasu i uzyskanie następnego profilu wilgotności.

Rozwiązanie może być rozszerzone lub zawężone przez zmianę Δx . Zmiana ta, dokonana wraz ze zmianą Δt przy zachowaniu stałej wielkości stosunku $r = \Delta t / (\Delta x)^2$, nie spowoduje różnicy w wartości θ , ponieważ wilgotność θ dla $(n+1)$ -go kroku czasu zależy tylko od θ w kroku n -tym i metody obliczania $D(\theta^{n+1})$. Przykład zawężania i rozszerzania krzywych rozkładu wilgotności przedstawia rycina 2, gdzie linie ciągłe powstały



Ryc. 2. Przykład rozszerzenia rozwiązania $\theta(x)$ przez jednoczesną zmianę Δt i Δx . Dla porównania - krzywe oznaczone linią przerywaną są rozwiązaniami otrzymanymi za pomocą transformacji Boltzmanna

przez jednoczesną zmianę Δx i Δt , linie przerywane odpowiadają quasi-analitycznym rozwiązaniom otrzymanym za pomocą transformacji Boltzman dla danych doświadczalnych Gardniera i Mayhugha [1/].

Porównanie wyników numerycznego i quasi-analitycznego rozwiązania wskazuje na dobrą zgodność obu metod.

Analogiczne rozwiązania zostały potem otrzymane przez Staple'a [40/],

który przedstawił jawny schemat różnicowy dający szereg niezależnych, zlinearyzowanych i bezpośrednio rozwiązywalnych równań. Również w pracach [23, 54, 59] rozpatrywane jest to samo zagadnienie, lecz z zastosowaniem schematu niejawnego.

Nieco inne podejście do numerycznej analizy nieustalonego przepływu wody w glebach nienasyconych zostało zaproponowane w 1964 r. przez Chu Wang i współaut. [46]. Autorzy nazwali swoją metodę "metodą ruchomego przekroju". Na podstawie znajomości wodnych charakterystyk gleby i warunków początkowych umożliwia ona określenie przyszłego rozkładu wilgotności jako funkcji miejsca i czasu w procesach infiltracji, osuszania i podsiąku ku górze powodowanego przez parowanie po okresie infiltracji.

Prawo Darcy'ego dla przepływu cieczy przez ciała przepuszczalne ma postać:

$$V = Q/A = K \cdot i,$$

gdzie:

V - prędkość wypływu $[m \cdot s^{-1}]$;

Q - natężenie przepływu w danej objętości w jednostce czasu $[m^3 s^{-1}]$;

A - pole przekroju, przez który następuje przepływ;

i - bezwymiarowy odpowiednik gradientu potencjału wody glebowej $[m H_2O \cdot m^{-1}]$;

K - przepuszczalność.

Dla przepływu nasyconego przepuszczalność jest oznaczona K_s i wyrażana w jednostkach prędkości $[m \cdot s^{-1}]$, a dla przepływu nienasyconego może być aproksymowana wzorem:

$$K \approx K_s \left(\frac{\theta - \theta_o}{\theta_s - \theta_o} \right)^N,$$

(N zwykle przyjmuje się równe 4), θ_o oznacza wilgotność progową, poniżej której ciecz nie występuje już w postaci ciągłej.

Przy przepływie horyzontalnym, gdy efekty grawitacji są zerowe, mamy:

$$i = \frac{dh}{dx},$$

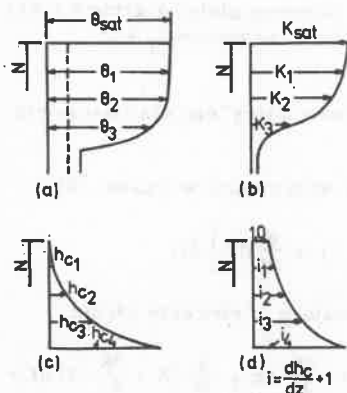
gdzie h_c jest ciśnieniem kapilarnym. Dla przepływu pionowego w dół:

$$i = \frac{dh_c}{dz} + \frac{dz}{dz} = 1 + \frac{dh_c}{dz},$$

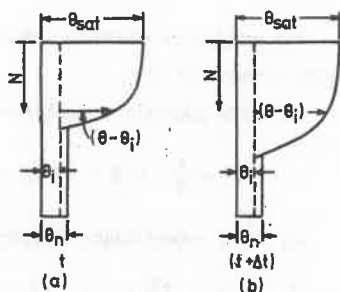
dla przepływu pionowego ku górze:

$$i = -\frac{dz}{dz} + \frac{dh_c}{dz} = -1 + \frac{dh_c}{dz}.$$

Proces infiltracji jest skomplikowany ze względu na funkcyjne zależności wiążące wilgotność i przewodność hydrauliczną z miejscem i czasem,



Ryc. 3. Relacje wiążące: głębokość "z" w profilu z (a) wilgotnością, (b) przewodnością hydrauliczną gleby K, (c) ciśnieniem ssącym (kapilarnym) h_c (d) gradientem potencjału "i"

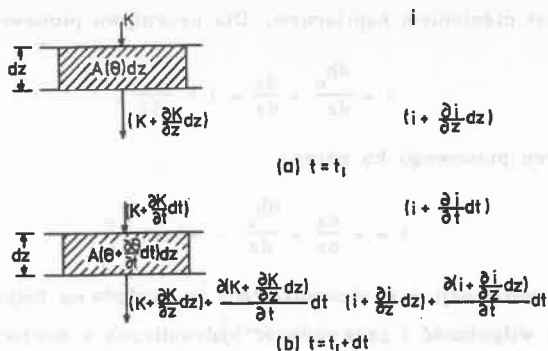


Ryc. 4. Rozkład wilgotności w profilu glebowym: (a) w chwili t , (b) w chwili $t + \Delta t$

gradient "i" z ciśnieniem kapilarnym, a ciśnienie to z wilgotnością. Przy-

kład tych relacji dla ustalonej chwili pokazuje rycina 3, a dynamikę rozkładu wilgotności w profilu podczas infiltracji przedstawia rycina 4.

W celu opisanie nieustalonej infiltracji autorzy [46] rozpatrywali element gleby w momencie t i o przedział Δt później, coobrazuje rycina 5.



Ryc. 5. Schemat przepływu wody przez warstwę gleby o grubości dz :
(a) stan w momencie t_1 , (b) stan w momencie $t_1 + dt$

Po przyjęciu warunku ciągłości i prawa Darcy'ego dla takiego elementu otrzymuje się:

1. wzór określający objętość cieczy wpływającą w czasie " dt ":

$$I = \frac{1}{2} \cdot A \left[K \cdot i + \left(K + \frac{\partial K}{\partial z} dz \right) \left(i + \frac{\partial i}{\partial z} dz \right) \right] dt;$$

2. wzór określający objętość wypływającą z elementu gleby:

$$Q = \frac{1}{2} A \left\{ \left(K + \frac{\partial K}{\partial z} dz \right) \left(i + \frac{\partial i}{\partial z} dz \right) + \left[K + \frac{\partial K}{\partial z} dz + \frac{\partial}{\partial t} \left(K + \frac{\partial K}{\partial z} dz \right) dt \right] \cdot \left[i + \frac{\partial i}{\partial z} dz + \frac{\partial}{\partial t} \left(i + \frac{\partial i}{\partial z} dz \right) dt \right] \right\} dt.$$

Różnica $I - Q$ jest równa zmianie zawartości ΔS wody w elemencie gleby i po odrzuceniu wyrazów wyższych rzędów i uporządkowaniu, ma postać:

$$\Delta S = - A \left(K \frac{\partial i}{\partial z} dz + i \frac{\partial K}{\partial z} dz \right) dt.$$

Ponieważ jednak $S = A \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} dt \right) dz$, zachodzi równość

$$A \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} dt \right) dz = - A \left(K \frac{\partial i}{\partial z} dz + i \frac{\partial K}{\partial z} dz \right) dt,$$

która po podzieleniu stronami przez $A dz dt$ daje związek:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = - \left(K \frac{\partial i}{\partial z} + i \frac{\partial K}{\partial z} \right) = - \frac{\partial (K \cdot i)}{\partial z}.$$

Oznacza to, że pochodna iloczynu $K \cdot i$ dla rozpatywanego przekroju, wzięta z przeciwnym znakiem jest równa zmianie uwilgotnienia przekro-

ju w bieżącej chwili. Po wprowadzeniu punktów podziału wzdłuż profilu, przyjęto założenie, że dla kolejnych trzech punktów relacje między wilgotnością, ciśnieniem kapilarnym, iloczynem przewodności hydraulicznej i gradientu potencjału $K \cdot i = \frac{d\Phi}{dz}$ a głębokością są wielomianami stopnia drugiego. Odpowiednie równanie krzywej rozkładu wilgotności ma postać:

$$\theta = az^2 + bz + c,$$

gdzie współczynniki a , b , c są rozwiązaniem układu:

$$\theta_i = az_i^2 + bz_i + c, \quad i = N-1, N, N+1.$$

Współczynniki te służą do wyliczenia wartości pochodnej w punkcie z_N , ponieważ $d\theta/dz = 2az + b$. Mamy stąd:

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)_t = -a(z_{N+1} - z_N) = \frac{\theta_N - \theta_{N+1}}{z_{N+1} - z_N} \quad (10)$$

Prowadząc podobne obliczenia dla funkcji h_c i Φ otrzymuje się a_1 , b_1 , c_1 oraz a_2 , b_2 , c_2 , pozwala to obliczyć $(dh_c/dz + 1)$ i $d(K \cdot i)/dz = d\Phi/dz$. Ponadto ponieważ $\theta = \theta(z, t)$, $z = z(\theta, t)$, zachodzi równość (pod warunkiem, że jacobian nie znika):

$$\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_\theta = - \frac{(\partial\theta/\partial t)}{(\partial\theta/\partial z)} \Big|_t,$$

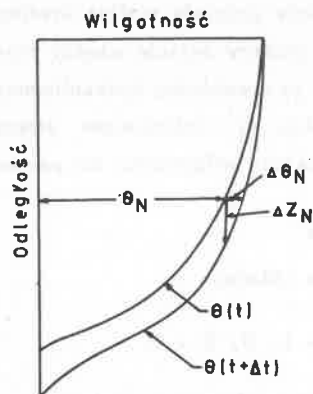
co można zapisać jako:

$$\frac{\Delta\theta_N}{\Delta z_N} = - \left(\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)_t. \quad (11)$$

$\Delta\theta_N$ jest wzrostem wilgotności na poziomie z_N w czasie Δt , Δz_N oznacza różnicę między położeniem punktu z_N a punktu, w którym wilgotność po czasie Δt jest identyczna z wilgotnością w z_N przed upływem Δt . Oznacza to, że w chwili "t" na poziomie z_N jest wilgotność θ i ta sama wilgotność θ w chwili $t + \Delta t$ na poziomie $z_N + \Delta z_N$ (stąd nazwa omawianej metody "ruchomy przekrój"). Schematycznie pokazuje to rycina 6.

Wzory (10) i (11) dają:

$$\Delta\theta_N = \Delta z_N (\theta_N - \theta_{N+1}) / (z_{N+1} - z_N) + a \Delta z_N (z_{N+1} - z_N).$$



Ryc. 6. "Ruchomy przekrój": Δz_N - różnica położenia punktów o tej samej wilgotności po upływie czasu Δt

Podobne przekształcenia dla $(\partial\theta/\partial t)|_z$ doprowadzają do wzoru:

$$\Delta\theta_N = \Delta t(\dot{\Phi}_N - \dot{\Phi}_{N+1})/(z_{N+1} - z_N) + a_2\Delta t(z_{N+1} - z_N).$$

Z dwóch ostatnich równości wynika, że:

$$\Delta z_N = \frac{(\dot{\Phi}_N - \dot{\Phi}_{N+1})/(z_{N+1} - z_N) + a_2(z_{N+1} - z_N)}{(\theta_N - \theta_{N+1})/(z_{N+1} - z_N) + a(z_{N+1} - z_N)} \Delta t.$$

Wzór ten określa wielkość Δz_N w przedziale czasu Δt dla N-tego poziomu gleby. Po zastosowaniu takiej procedury dla wszystkich poziomów uzyskuje się ruch frontu wilgotności podczas Δt , tj. nowy profil na końcu przedziału Δt .

Algorytm wymaga podania relacji wiążących ciśnienie kapilarne z wilgotnością, przewodność hydrauliczną z wilgotnością oraz relacji między gradientem potencjału i ciśnieniem kapilarnym. Po zadaniu początkowego rozkładu wilgotności metoda pozwala uzyskać potrzebne wyniki.

Problem rozwiązywania równania przepływu komplikuje się jeszcze bardziej z chwilą, gdy brak jest założenia o jednorodności gleby. W pracach [18, 47, 33, 59] przedstawione są próby obliczenia rozkładu wilgotności w glebie o uwarstwionym profilu.

Hanks i Bowers [18] podali numeryczne rozwiązanie równania przepływu podczas infiltracji, przy czym nie zakłada się jednorodności gleby

i jednolitej wilgotności początkowej. Metoda Hanksa i Bowersa może być stosowana zarówno dla infiltracji poziomej, jak też i pionowej, tzn. można uwzględniać wpływ gravitacji na rozkład wilgotności.

Równanie przepływu jednowymiarowego (2) przekształcono do postaci:

$$\begin{aligned} (\theta_i^j - \theta_i^{j-1}) / \Delta t = & \left[(h_{i-1}^{j-1} + h_{i-1}^j + 2G - h_i^{j-1} - h_i^j) K_{i-1/2}^{j-1/2} + \right. \\ & \left. + (h_i^{j-1} + h_i^j + 2G - h_{i+1}^{j-1} - h_{i+1}^j) K_{i+1/2}^{j-1/2} \right] / \left[2(\Delta x)^2 \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

Indeksy i, j odpowiadają odległości i chwili czasu, h oznacza ciśnienie [m słupa $H_2O \approx 10^{-2}$ hPa], θ - uwilgotnienie gleby [$m^3 m^{-3}$], K - współczynnik przewodnictwa hydraulicznego [$m \cdot s^{-1}$], symbol G występujący po prawej stronie równania daje możliwość modyfikacji założeń procesu. W zależności od wartości przyjętej dla G uzyskuje się profile dla procesów zachodzących w różnych kierunkach. Przyjęcie, że $G = x$ sprawia że równanie (12) opisuje infiltrację pionową ku dołowi, $G = -x$ - pionową ku górze, $G = 0$ - poziomą.

Przyjęto, że związek między h i θ jest jednoznaczny i wprowadzono różniczkową pojemność wodną gleby:

$$C_i^{j-1/2} = \left(\frac{\partial \theta}{\partial h} \right)_i^{j-1/2}$$

Wówczas:

$$\frac{\theta_i^j - \theta_i^{j-1}}{\Delta t} \approx \frac{h_i^j - h_i^{j-1}}{\Delta t} C_i^{j-1/2},$$

co po wstawieniu do (12) umożliwia rozwiązanie układu n równań z n niewiadomymi.

W powyższym rozwiązaniu Hanksa i Bowersa [18] najważniejszym problemem jest określenie wartości $K, C, \Delta t$. Przyjęto stały krok Δx . Na każdym etapie obliczeń zmienna była wielkość Δt zdefiniowana jako czas potrzebny na przejście do gleby stałej ilości wody Q . Δt na początku obliczeń jest małe w porównaniu z wartościami Δt w trakcie procesu, ponieważ prędkość infiltracji (początkowo wysoka) maleje z czasem. Związek

kiem charakteryzującym przedział czasu jest:

$$(\Delta t)^{j+1/2} = Q/I^{j-1/2},$$

gdzie $I^{j-1/2}$ oznacza przepływ $[m \cdot s^{-1}]$ w poprzednim przedziale Δt .

Wartość K określa wzór

$$K_{i-1/2}^{j-1/2} = D_{i-1/2}^{j-1} (\theta_{i-1}^{j-1} - \theta_i^{j-1}) / (h_{i-1}^{j-1} - h_i^{j-1}),$$

gdzie dyfuzyjność $D [m^2 s^{-1}]$ jest określona wzorem:

$$D_{i-1/2}^{j-1/2} = \left(\sum_{\theta=\theta_L}^{\theta_{i-1}^{j-1}} D \Delta \theta - \sum_{\theta=\theta_L}^{\theta_i^{j-1}} D \Delta \theta \right) / (\theta_{i-1}^{j-1} - \theta_i^{j-1}),$$

przy czym θ_L jest najmniejszą wartością wilgotności dla jakiej $D(\theta)$ zostało określone.

Dane do programu były podane w formie tablic θ , D , h . Pomocniczą wielkość $I^{j-1/2}$ obliczano jako:

$$I^{j-1/2} = (h_o^{j-1} + h_o^j + 2G - h_1^{j-1} - h_1^j) K_{1/2}^{j-1/2} / (2\Delta x).$$

Aby uwzględnić niejednorodność gleby, przewodnictwo K przy granicy dwu warstw o różnych właściwościach wyliczano z równania:

$$K_{\text{graniczne}} = K_a K_b [(K_a + K_b)/2],$$

gdzie K_a jest przewodnictwem hydraulicznym gleby powyżej granicy, K_b - poniżej granicy.

W celu skontrolowania wyników uzyskanych metodą numeryczną, porównano je z rozwiązaniami otrzymanymi przez Philipa [29, 30, 31]. Stwierdzono, że w glebach o uwarstwowionym profilu przebieg procesu infiltracji zależy od warstwy o najmniejszym współczynniku przewodności wodnej. Powyższa metoda obliczeniowa wymaga, prócz znajomości warunków początkowych i brzegowych, również wiedzy o relacjach między wilgotnością a ciśnieniem kapilarnym i wilgotnością a współczynnikiem dyfuzji. Dla gleb piaszczystych rozwiązanie równania (2) z uwzględnieniem dyfuzyjności wody w glebie nie daje dobrych wyników. Było to jedną z przyczyn, dla których Rubin [37] zaproponował inną metodę rozwiązania. Przyjął

on, że w procesie infiltracji wody pochodzącej z intensywnych opadów deszczowych może powstawać pod powierzchnią gleby warstwa nasyciona, która utrzymuje się podczas całego procesu i wtedy współczynnik dyfuzji określony jako $K/(\partial\theta/\partial H)$ miałby wartość nieskończenie wielką (H oznacza tu ciśnienie ssące). Do równania (2) dołączone zostały warunki uwzględniające fakt, że gdy pojemność wodna gleby jest przekroczona, na powierzchni gleby tworzy się warstewka wody.

Zadano stałe ciśnienie ssące początkowe: $H = H_1$, $x \geq 0$, $t = 0$. Od momentu rozpoczęcia się opadów, aż do chwili t_p , gdy pojawia się warstwa wody na powierzchni gleby, przez powierzchnię przepływa stały strumień, równy co do wielkości stałej intensywności opadów deszczowych R :

$$R = \text{Flux} = -K(H) \frac{\partial H}{\partial x} + K(H), \quad x = 0, \quad t \in (0, t_p).$$

Od chwili t_p utrzymująca się na powierzchni woda wytwarza stałe ciśnienie H_u :

$$H = H_u \geq 0, \quad x = 0, \quad t \geq t_p.$$

Na głębokości $x = \infty$ dla $t \geq 0$ występuje stałe ciśnienie $H = H_1$.

Rubin zastosował transformację Kirchoffa, tj. wprowadził nową zmienną v :

$$v = v(H) = \frac{1}{V} \int_{H_{\max}}^H K(h) dh,$$

gdzie:

$$V = \int_{H_{\max}}^{H_1} K(h) dh.$$

Przy założeniu, że funkcja $v(H)$ jest odwracalna, mamy stąd układ równań:

$$Y(v) \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - Z(v) \frac{\partial v}{\partial x}, \quad x \geq 0, \quad t > 0,$$

$$v(H_1) = 1, \quad (x \geq 0, \quad t = 0) \text{ lub } (x = \infty, \quad t > 0),$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{K[v(v)]}{V} - R, \quad x = 0, \quad 0 < t \leq t_p,$$

$$v(H_u) = a, \quad x = 0, \quad t \geq t_p, \quad a \geq 0 \quad (a = 0 \text{ dla } H_u = H_{\max}),$$

$$Y(v) = \frac{1}{V} \frac{\partial \theta}{\partial H} \frac{\partial H}{\partial v} = \frac{1}{V} \frac{\partial \theta}{\partial v} = \frac{\partial \theta}{\partial H} \frac{1}{K[H(v)]}, \quad x \geq 0, \quad t \geq 0,$$

$$Z(v) = \frac{1}{V} \frac{\partial K(H)}{\partial H} \frac{\partial H}{\partial v} = \frac{1}{V} \frac{\partial K[H(v)]}{\partial v} = \frac{\partial \ln K(H)}{\partial H}, \quad x \geq 0, \quad t \geq 0.$$

Jeżeli w rozważanym modelu wewnątrz gleby znajdują się warstwy nasycone, wtedy H zmienia się wraz z głębokością, zaś θ i K są stałe. Pochodne $\partial \theta / \partial H$ i $\partial K / \partial H$ są równe zeru, stąd $Y(v) = Z(v) = 0$, czyli $\partial^2 v / \partial x^2 = 0$ dla $x \geq 0, t \geq 0$. Wynika stąd, że $\partial v / \partial x$ jest stałe i równe $(K_{\text{sat}} - R) / V$ dla $x = 0$ i $t \in (0, t_p > K_{\text{sat}}$ jest przewodnością hydrauliczną gleby nasyconej.

W procesie obliczania wartości "v" przeprowadzana była ciągła kontrola w celu uzyskania informacji, czy gleba na danej głębokości jest nasycona czy nie. W zależności od wyniku stosowano równanie odnoszące się do stanu nasycenia lub do przepływu przez ośrodek nienasycony.

Dane empiryczne dotyczące ciśnienia ssącego i przewodnictwa hydraulicznego gleby (zależnych od θ) muszą być przekształcone w celu umożliwienia konstrukcji algorytmów funkcji pomocniczych $Y(v)$ i $Z(v)$. Wyniki obliczeń powinny być poddane przekształceniu odwrotnemu, tj. powinny być wyrażone jako funkcje wilgotności θ lub ciśnienia H .

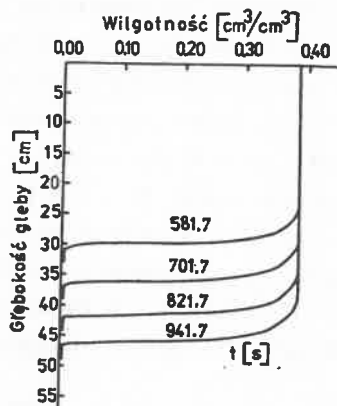
Na podstawie otrzymanych rezultatów stwierdzono, że każda z krzywych opisujących natężenie infiltracji opadów deszczowych w czasie dzieli się na dwie części: horyzontalną odnoszącą się do infiltracji poprzedzającej moment powstania warstwy wody na powierzchni gleby oraz opadającą, która odpowiada procesowi infiltracji następującemu po tym momencie.

Rozkład wilgotności w profilu glebowym podczas infiltracji opadów podaje rycina 7.

W 1968 r. Chu Wang i Lakshminarayana [47] podali inną metodę obliczeń dla gleb o uwarstwionym profilu, przy czym równanie wyjściowe zawierało współczynnik przewodności hydraulicznej $K = K(z, \theta)$, a nie współczynnik dyfuzji D , czyli miało postać:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial \theta}{\partial z} \right),$$

Ryc. 7. Rozkłady wilgotności charakterystyczne dla infiltracji opadów deszczowych



gdzie ϕ jest funkcją potencjału macierzystego wody glebowej Ψ i zależy od głębokości z , $\phi = \Psi - z$, ponadto $\theta = \theta(z, t)$, $\Psi = \Psi(z, \theta)$. Argumentem funkcji K , θ , Ψ jest współrzędna przestrzenna uwzględniająca niejednorodność gleby. W pracy [47] transformacja Kirchhoffa nie była stosowana.

Po zrózniczkowaniu:

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial t} \right|_z = \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) \right]_t - \left. \frac{\partial K}{\partial z} \right|_t$$

i odrzuceniu wyrazów zawierających $(\partial \theta / \partial z)_t^2$, ponieważ w praktyce ich wpływ jest znikomy, otrzymuje się równanie dla gleb niejednorodnych:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \theta}{\partial t} \right|_z = & K \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \left. \frac{\partial K}{\partial z} \right|_{\theta} \left[\left. \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right|_{\theta} - 1 \right] + \left. \frac{\partial \theta}{\partial z} \right|_t \left[\left. \frac{\partial K}{\partial \theta} \right|_z \left(\left. \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right|_{\theta} - 1 \right) + \right. \\ & \left. + \left. \frac{\partial K}{\partial z} \right|_{\theta} \left. \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right|_z + 2K \left. \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta \partial z} \right|_{\theta, z} \right] + K \left. \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right|_z \left. \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right|_t. \end{aligned} \quad (13)$$

W przypadku, gdy gleba jest jednorodna, równanie różniczkowe opisujące proces przenoszenia wody ma prostszą postać:

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial t} \right|_z = K \left. \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right|_t + \left. \frac{\partial K}{\partial z} \right|_t \left[\left. \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right|_t - 1 \right].$$

Do równania (13) odnoszą się warunki:

1. początkowy: $\theta(z, t) = \theta_0$, $z > 0$, $t = 0$;

2. graniczne, których wybór zależy od tego, czy brany jest pod uwagę proces odpływu na głębokość "d" i wtedy: $\partial \phi / \partial z = 0$ dla $z = 0$, $t \geq 0$; $\theta(z, t) = \theta_c$ dla $z = d$, $t \geq 0$; czy też proces infiltracji przez powierzchnię, wtedy: $\theta(z, t) = \theta_s$ dla $z = 0$, $t \geq 0$ oraz $\theta(z, t) = \theta_0$ dla $z = d$, $t \geq 0$. θ_c oznacza pewną stałą wilgotność, θ_s - wilgotność nasycenia, θ_0 - wilgotność w przybliżeniu równą progowej, tj. takiej, poniżej której ciecz nie występuje już w postaci ciągłej.

Równanie (13) jest przybliżone za pomocą równania różnicowego:

$$\begin{aligned} \frac{\theta_i^{j+1} - \theta_i^j}{\Delta t} = & \left\{ K_{ip}^j \frac{\psi_{i+1,p}^j - 2\psi_{i,p}^j + \psi_{i-1,p}^j}{(\Delta z)^2} + \right. \\ & \left. + \frac{K_{i+1,p}^j - K_{i,p}^j}{\Delta z} \left[\frac{\psi_{i+1,p}^j - \psi_{i,p}^j}{\Delta z} - 1 \right] \right\} + \left\{ \left[\frac{\theta_{i+1}^j - \theta_i^j}{\Delta z} \right] \cdot \right. \\ & \cdot \left[\frac{K_{i,p+1}^{j+1} - K_{i,p}^j}{\theta_i^{j+1,1} - \theta_i^j} \right] \cdot \left[\frac{\psi_{i+1,p}^j - \psi_{i,p}^j}{\Delta z} - 1 \right] + \left[\frac{K_{i+1,p}^j - K_{i,p}^j}{\Delta z} \right] \cdot \\ & \cdot \left[\frac{\psi_{i,p+1}^{j+1,1} - \psi_{i,p}^j}{\theta_i^{j+1,1} - \theta_i^j} \right] + \frac{2K_{i,p}^{j+1}}{\theta_i^{j+1,1} - \theta_i^j} \left[\frac{\psi_{i+1,p+1}^{j+1,1} - \psi_{i,p+1}^{j+1,1} - \psi_{i+1,p}^j}{\Delta z} + \right. \\ & \left. + \frac{\psi_{i,p}^j}{\Delta z} \right] + K_{i,p}^j \left[\frac{\psi_{i,p+1}^{j+1,1} - \psi_{i,p}^j}{\theta_i^{j+1,1} - \theta_i^j} \right] \cdot \left[\frac{\theta_{i+1}^j - 2\theta_i^j + \theta_{i-1}^j}{\Delta z} \right] \left. \right\} \quad (14) \end{aligned}$$

Indeks "i" odnosi się do miejsca, "j" - czasu, "p" - wilgotności, "l" - jest wskaźnikiem iteracyjnym. Indeks "p" jest brany pod uwagę w celu uwzględnienia różnych charakterystyk wodnych poszczególnych warstw gleby. Z równania (14) jest obliczane θ_i^{j+1} , które traktuje się jako pierwsze przybliżenie poszukiwanej wilgotności $\theta_i^{j+1,1}$, tj. przyjmuje się jako $\theta_i^{j+1,1}$. Następnie są wyliczane: $K_{i,p+1}^{j+1,1}$, $\psi_{i,p+1}^{j+1,1}$ i powtórnie jest obliczana $\theta_i^{j+1,1}$, jako druga ocena wilgotności $\theta_i^{j+1,2}$. Proces jest powtarzany aż do momentu, gdy

różnica między dwoma kolejnymi przybliżeniami będzie mniejsza od z góry zadanej wielkości, tj. gdy:

$$\max_i \left| \theta_i^{j+1,1} - \theta_i^{j+1,1-1} \right| < \varepsilon, \quad \varepsilon > 0,$$

lub do chwili, gdy "1" osiąga liczbę maksymalnie dozwoloną dla wskaźnika iteracji

Dodatkowo są obliczane:

1. zmiana wilgotności w całym profilu w czasie Δt^j :

$$CL_j = \sum_{i=1}^{m-1} (\theta_{i+1}^j + \theta_i^j) \Delta z / 2 - \sum_{i=1}^{m-1} (\theta_{i+1}^{j+1} + \theta_i^{j+1}) \Delta z / 2,$$

2. średnia szybkość tej zmiany:

$$AR_j = CL_j / \Delta t^j.$$

Warunkiem stabilności pokazanej metody numerycznej jest zachowanie nierówności:

$$\Delta t^{j+1} \leq \frac{1}{2} \left[(\Delta z)^2 / (K \partial \Psi / \partial \theta) \right]_j,$$

stąd przy różnych głębokościach potrzebny jest dobór takiego Δt^j , aby powyższa nierówność była spełniona.

Różnice między wartościami otrzymanymi z pomiarów eksperymentalnych a wynikami uzyskanymi za pomocą maszyny cyfrowej są stosunkowo nieduże i powodowane błędami generowanymi podczas obliczeń na komputerach. W celu uniknięcia dodatkowych błędów, którymi obarczone są dane wejściowe (potencjał wody glebowej i przewodnictwo hydrauliczne stabilizowane względem wilgotności i głębokości), autorzy [47] zaproponowali zastosowanie metody wygładzania danych (metoda mini-max Czebysze-wa).

Prostszą technikę rozwiązywania nieliniowego cząstkowego równania różniczkowego opisującego przepływ w ośrodkach porowatych przedstawili w pracy [6] Bruch i Zyvolski. Przyjęli oni założenie, że współczynnik dyfuzyjności i współczynnik przewodnictwa kapilarnego są jednoznacznie funkcjami wilgotności θ z klasy wielomanów. Opierając się na zasadzie

Galerkina wykorzystano metodę elementu skończonego. Dziedzina, w której szukano rozwiązania, została podzielona na elementarne przedziały przestrzeni i czasu. Wilgotność θ aproksymowano wzorem:

$$\theta(z, t) = \sum N_l(z, t) \theta_l,$$

gdzie N_l są funkcjami liniowymi określonymi na przedziałach " l " jest wskaźnikiem sumowania. W ten sposób rozwiązanie sprowadza się do rozwiązania układu " n " nieliniowych równań algebraicznych o " n " zmiennych. Łatwość zaprogramowania na maszynę cyfrową, stabilność metody, jej szybka zbieżność do rozwiązania i brak stałych parametrów dla całej dziedziny - stanowią niewątpliwe zalety metody. Zasada Galerkina stanowi podstawę również w pracy [15], gdzie autorzy na dwa sposoby (metodą elementu skończonego oraz metodą różnic skończonych) rozwiązywali numerycznie równanie przepływu z dodatkowym wyrazem opisującym pobór wody przez korzenie roślin. Jest to tak zwany człon źródłowy, którego uwzględnienie podyktowane jest koniecznością wynikającą z praktycznych zastosowań otrzymywanych rozwiązań równania przepływu. Założenie o istnieniu ujemnych źródeł wewnątrz rozpatrywanego nienasyconego obszaru było przyjęte przez Styczka i Pyzika [41], którzy opracowali rozwiązanie numeryczne dla równania:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[D(\theta) \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] + \frac{\partial K(\theta)}{\partial x} + q(\theta), \quad (15)$$

gdzie $q(\theta)$ jest ujemnym źródłem obrazującym pobieranie wody przez korzenie roślinne. Dodatkowo narzucone są warunki:

$$\theta(t, 0) = \theta_1(t), \quad t > 0,$$

$$\theta(t, L) = \theta_2(t), \quad t > 0,$$

$$\theta(0, x) = \theta_0(x), \quad 0 < x < L.$$

Po wprowadzeniu siatki punktów:

$$t^0 = 0, \quad t^{k+1} = t^k + \tau, \quad k = 0, 1, \dots;$$

$$x_0 = 0, \quad x_{i+1} = x_i + h, \quad i = 0, 1, \dots, N-1, \quad x_N = L,$$

otrzymuje się układ równań:

$$\begin{aligned}
(\theta_i^{k+1} - \theta_i^k)/\tau = & \left[D_{i+1/2}^k \theta_{i+1}^{k+1} - (D_{i+1/2}^k + D_{i-1/2}^k) \theta_i^{k+1} + \right. \\
& \left. + D_{i-1/2}^k \theta_{i-1}^{k+1} \right] / h^2 + K_i^k \left[\delta(K_i^k) (\theta_{i+1}^{k+1} - \theta_i^{k+1}) + \right. \\
& \left. + (1 - \delta(K_i^k)) (\theta_i^{k+1} - \theta_{i-1}^{k+1}) \right] / h + q_i^k + \dot{q}_i^k (\theta_i^{k+1} - \theta_i^k) / 2, \quad i=1, \dots, N-1,
\end{aligned}$$

gdzie symbol $\delta(z)$ oznacza odpowiednio zero dla $z \geq 0$ i jeden dla $z < 0$. Ponadto otrzymuje się zbiór warunków początkowych i brzegowych w postaci:

$$\theta_0^{k+1} = \theta_1(t^{k+1}), \quad \theta_N^{k+1} = \theta_2(t^{k+1}), \quad \theta_i^0 = \theta_0(x_i), \quad i = 0, \dots, N.$$

Wskaźnik "k" odnosi się do czasu, wskaźnik "i" określa położenie punktu. Przyjęto oznaczenia:

$$D_{i+1/2}^k = D \left[(\theta_i^k + \theta_{i+1}^k) / 2 \right],$$

$$\dot{K}_i^k = \frac{dK}{d\theta} \Big|_{\theta_i^k},$$

$$\dot{q}_i^k = \frac{dq}{d\theta} \Big|_{\theta_i^k},$$

$$q(\theta_i^{k+1/2}) = q(\theta_i^k) + \frac{dq}{d\theta} \Big|_{\theta_i^k} (\theta_i^{k+1} - \theta_i^k) / 2.$$

Udowodniono, że gdy K i D są funkcjami θ klasy C^1 , $D > 0$, $q \leq 0$, problem ma rozwiązanie w postaci układu równań różnicowych względem θ_i^{k+1} , $i = 1, \dots, N-1$, a mianowicie:

$$\theta_0^{k+1} = \theta_1(t^{k+1}),$$

$$\hat{A}_i^{k+1} \theta_{i+1}^{k+1} - \hat{B}_i^{k+1} \theta_i^{k+1} + \hat{C}_i^{k+1} \theta_{i-1}^{k+1} = \hat{D}_i^{k+1}, \quad (16)$$

$$\theta_N^{k+1} = \theta_2(t^{k+1}), \quad i = 1, 2, \dots, N-1; \quad k=0, 1, \dots$$

z $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$, $\hat{D}$ określonymi jako:

$$\hat{A}_i^{k+1} = \left[D_{i+1}^k / 2 + h K_i^k \delta(K_i^k) \right] \tau / h^2,$$

$$\hat{B}_i^{k+1} = (D_{i+1}^k + D_{i-1}^k / 2) \tau / h^2 + (1 - \dot{q}_i^k \tau / 2) + \\ + \left[\dot{K}_i^k 2 \delta(K_i^k) - 1 \right] \tau / h,$$

$$\hat{C}_i^{k+1} = \left[D_{i-1}^k - (1 - \delta(K_i^k)) h K_i^k \right] \tau / h^2,$$

$$\hat{D}_i^{k+1} = -\theta_i^k (1 - \dot{q}_i^k \tau / 2) - q_i^k \tau.$$

Układ (16) można rozwiązać metodą przegnania, tj. wyznaczyć:

$$\theta_{i+1}^{k+1} = \alpha_{i+1}^{k+1} \theta_i^{k+1} + \beta_{i+1}^{k+1}, \quad i = 0, 1, \dots, N-2; \quad k > 0,$$

ze współczynnikami α i β równymi odpowiednio:

$$\alpha_i^{k+1} = \hat{C}_i^{k+1} / (\hat{B}_i^{k+1} - \alpha_{i+1}^{k+1} \hat{A}_i^{k+1}),$$

$$\beta_i^{k+1} = (\hat{A}_i^{k+1} \beta_{i+1}^{k+1} - \hat{D}_i^{k+1}) / (\hat{B}_i^{k+1} - \alpha_{i+1}^{k+1} \hat{A}_i^{k+1}),$$

dla $i = 1, 2, \dots, N-2$, zaś dla $i = N-1$:

$$\alpha_{N-1}^{k+1} = \hat{C}_{N-1}^{k+1} / \hat{B}_{N-1}^{k+1},$$

$$\beta_{N-1}^{k+1} = (\hat{A}_{N-1}^{k+1} \theta_N^{k+1} - \hat{D}_{N-1}^{k+1}) / \hat{B}_{N-1}^{k+1}.$$

W ten sposób otrzymuje się rozkład wilgotności w profilu glebowym w $(k+1)$ -szej chwili na podstawie danych w funkcji wilgotności: D, K, q . W podobnym ujęciu zagadnienie członu źródłowego było poruszone przez Zaradnego [59], który podał niejawną schemat różnicowy numerycznego całkowania równania (4).

Źródła dodatnie, tj. przypadek infiltracji wody na skutek wypływu z wolno sączącego źródła, były rozpatrywane przez Brandta i współaut. [3, 4]. Badano dwa modele matematyczne: przepływu płaskiego we współrzędnych kartezjańskich (x, y) oraz przepływu we współrzędnych cylindrycznych (r, z) . Przyjęto, że gleba jest izotropowym i jednorodnym

ciałem porowatym, w którym początkowa wilgotność jest jednolita i na tyle mała, że ruch wody można zaniedbać. Przepływ w trójwymiarowej przestrzeni opisany jest wzorem:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] - \frac{\partial K(\theta)}{\partial z}, \quad (17)$$

"z" jest współrzędną pionową, dodatnią ku dołowi. Płaszczyzna (x, y), jest nawadniana przez zbiór źródeł rozmieszczonych w węzłach prostokątnej siatki i odległych od siebie o $2 \cdot X$ i $2 \cdot Y$. Wnętrze całego układu jest dzięki temu podzielone na identyczne elementy objętości W, o długości X, szerokości Y i głębokości Z (Z jest dowolną stałą). Przyjęto, że każdy element objętości jest niezależną jednostką w tym sensie, że między sąsiednimi elementami brak przepływu. W dalszej analizie jest rozpatrywany jeden element objętości.

Początek układu współrzędnych (0,0,0) jest umieszczony w środku źródła, wtedy $W = \{0 \leq x \leq X, 0 \leq y \leq Y, 0 \leq z \leq Z\}$, a $x = 0$, $x = X$, $y = 0$, $y = Y$ są płaszczyznami symetrii i brak przez nie przepływu, tj.:

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{x=0, x=X} = 0, \quad \left. \frac{\partial \theta}{\partial y} \right|_{y=0, y=Y} = 0,$$

podobny warunek można narzucić na $\partial \theta / \partial z|_{z=Z}$. Mamy więc:

$$\begin{aligned} \partial \theta / \partial x &= 0 \text{ dla } x=0, \quad x=X, \quad t \geq 0, \\ \partial \theta / \partial y &= 0 \text{ dla } y=0, \quad y=Y, \quad t \geq 0, * \\ \partial \theta / \partial z &= 0 \text{ dla } z=Z, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

W celu określenia warunków brzegowych na powierzchni gleby ($z=0$) należy przyjąć dwa dodatkowe założenia: wypływ ze źródła jest znaną funkcją czasu $f(t)$, ponadto na poziomym przekroju w otoczeniu źródła obszar nasycony ma kształt okręgu, którego promień rośnie z upływem czasu $r = \rho(t)$. Woda może natychmiast po wypłynięciu ze źródła infiltrować do gleby lub parować. Przyjęto, że szybkość parowania określa funkcja $E(\theta, t)$. Model matematyczny dla tak postawionego zadania, ma postać:

$$\theta = \theta_s, \quad 0 \leq x^2 + y^2 \leq [\rho(t)]^2, \quad z = 0, \quad t > 0,$$

$$K(\theta) + E - D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0, \quad x^2 + y^2 > [\rho(t)]^2,$$

$$\iint_G \left[K(\theta_s) + E - D(\theta_s) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] dx dy = \frac{1}{4} f(t),$$

$$G = \left\{ (x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq [\rho(t)]^2 \right\},$$

θ_s jest wilgotnością nasycenia,

$$\theta = \theta_n, \quad t = 0, \quad (x, y, z) \in W,$$

θ_n jest jednolitą wilgotnością początkową.

Aby zachodził proces nawilżania elementu W, musi być dodatkowo: $f(t) \geq 0$, $f'(t) \geq 0$ dla $t > 0$, zaś wartości funkcji $E(\theta_n)$ i $K(\theta_n)$ muszą być dostatecznie małe. Do obliczeń przyjęto $E = 0$.

Dla uproszczenia analizowano dwuwymiarowy przepływ cylindryczny zachodzący dopóty, dopóki front zwilżania nie osiągnie zewnętrznych granic elementu objętości W oraz przypadek przepływu, gdy źródła są rozmieszczone blisko siebie wzdłuż linii prostej. Pierwszy model opisano we współrzędnych cylindrycznych (r, z) , drugi - kartezjańskich (x, z) .

Po wprowadzeniu zmiennej:

$$S(\theta) = \int_{\theta_n}^{\theta} D(\alpha) d\alpha,$$

(gdzie α jest jedynie zmienną pomocniczą) i uwzględnieniu faktu, że dla źródeł położonych wzdłuż prostej obszar nasycony w przekroju poziomym można aproksymować za pomocą nieskończonego paska o szerokości $\rho(t)$, otrzymuje się przepływ niezależny od współrzędnej "y" i zgodny z relacjami:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial^2 S(\theta)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S(\theta)}{\partial z^2} - \frac{\partial K(\theta)}{\partial z},$$

$$\theta = \theta_n, \quad 0 \leq x \leq X, \quad 0 \leq z \leq Z, \quad t = 0,$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = 0, \quad x = 0, \quad x = X, \quad 0 \leq z \leq Z, \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = 0, \quad 0 \leq x \leq X, \quad z = Z, \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$\theta = \theta_s, \quad 0 \leq x \leq \rho(t), \quad z = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (18)$$

$$K + E - \frac{\partial S}{\partial z} = 0, \quad \rho(t) < x \leq X, \quad z = 0, \quad 0 < t \leq T,$$

$$\int_0^{\rho(t)} \left[K + E - \frac{\partial S}{\partial z} \right] dx = \frac{1}{2} f(t), \quad z = 0, \quad 0 < t \leq T,$$

gdzie T oznacza czas końca infiltracji.

Analogiczne wzory można wyprowadzić biorąc pod uwagę źródła umieszczone w ten sposób, by brak było interakcji między nimi. Wilgotność θ jest wtedy funkcją współrzędnych z , t i promienia $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$. Wzory (18) ze zmienną " r " wstawioną w miejsce " x ", oraz " R " w miejsce " X ", z ostatnim warunkiem zmienionym na:

$$2\pi \int_0^{\rho(t)} \left[K + E - \frac{\partial S}{\partial z} \right] r \, dr = f(t)$$

i równaniem (17) w postaci:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial^2 S}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial S}{\partial r} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} - \frac{\partial K}{\partial z},$$

opisują przepływ w takim systemie.

Procedura numeryczna do rozwiązania powyższego równania i towarzyszących mu warunków brzegowych i początkowych, wymaga wprowadzenia siatki punktów w trójwymiarowej przestrzeni (ξ, z, t) . ξ oznacza " x " dla przepływu płaskiego, " r " dla modelu cylindrycznego. Punktami węzłowymi są

$$(\xi_i, z_l, t^j),$$

gdzie

$$\xi_i = (i - 1/2) \cdot h, \quad i = 0, 1, \dots, N+1;$$

$$z_l = l \cdot h, \quad l = 0, 1, \dots, M+1;$$

$$t^j = \sum_{p=1}^j k_p \text{ dla } j \geq 1 \text{ i } t^0 = 0;$$

k_p - zmienny przedział czasu,

h - stały odcinek w przestrzeni

przy czym $Z = M \cdot h$, $X = N \cdot h$, ($R = N \cdot h$).

Przy takich oznaczeniach mamy:

$$\begin{aligned}\theta_{i,1}^{j+1/2} &= \theta_{i,1}^j, \\ (\theta_{i,1}^{j+1/2} - \theta_{i,1}^j) / k^{1/2} &= (S_{i+1,1}^j - 2 \cdot S_{i,1}^j + S_{i-1,1}^j) / h^2 + \\ &+ \gamma (S_{i+1,1}^j - S_{i-1,1}^j) / [(2 \cdot i - 1) h^2] + (S_{i,1+1}^{j+1/2} - 2 S_{i,1}^{j+1/2} + \\ &+ S_{i,1-1}^{j+1/2}) / h^2 - (K_{i,1+1}^{j+1/2} - K_{i,1-1}^{j+1/2}) / (2 \cdot h),\end{aligned}$$

gdzie $\gamma = 0$ dla przepływu płaskiego, $\gamma = 1$ dla cylindrycznego.

Odpowiednie warunki brzegowe dla $t^{j+1/2}$ mają postać:

$$\theta_{i,M+1}^{j+1/2} = \theta_{i,M}^{j+1/2}, \quad i = 1, \dots, M,$$

$$\theta_{1,0}^{j+1/2} = \theta_s, \quad i = 1, \dots, i_s - 1,$$

$$F_i = 0, \quad i = i_s + 1, \dots, N,$$

$$F_{i_s} = f(t^{j+1/2}) - \sum_{l=1}^{i_s-1} F_l,$$

z $i_s \approx \varphi(t)/h$, oraz:

$$F_i = 2 h (1 - \gamma + \gamma \pi \xi_i) \left[K_{i,0}^{j+1/2} + E_i^{j+1/2} - \Delta_z S_{i,0}^{j+1/2} / (2 h) \right],$$

$$\Delta_z S_{i,0}^{j+1/2} = - 3 S_{i,1}^{j+1/2} + 4 S_{i,1}^{j+1/2} - S_{i,2}^{j+1/2}.$$

Zbieżność $\Delta_z S_{i,0}^{j+1/2} / (2 h)$ do $\partial S / \partial z$ w punkcie $z = 0$ jest rzędu $O(h^2)$.

Dla ustalonej chwili powstaje więc zamknięty układ $M + 2$ równań z $M + 2$ niewiadomymi $\theta_{i,1}^{j+1/2}$ ($i = 0, 1, \dots, M+1$). Każdy z takich N układów ma macierz trójdziagonalną i dla dostatecznie małych " h " dodatnio określona, stąd układy te można rozwiązać mimo nieliniowej zależności K, S, E od θ . W drugim etapie rozwiązanie jest prowadzone dla czasu t^{j+1} , wtedy równanie różnicowe przyjmuje formę:

$$\begin{aligned}
 (\theta_{i,1}^{j+1} - \theta_{i,1}^{j+1/2})/k^{j/2} &= (S_{i+1,1}^{j+1} - 2 S_{i,1}^{j+1} + S_{i-1,1}^{j+1})/h^2 + \\
 &+ \gamma (S_{i+1,1}^{j+1} - S_{i-1,1}^{j+1}) / [(2i-1)h^2] + (S_{i,1+1}^{j+1/2} - 2 S_{i,1}^{j+1/2} + \\
 &+ S_{i,1-1}^{j+1/2})/h^2 - (K_{i,1+1}^{j+1/2} - K_{i,1-1}^{j+1/2})/(2h)
 \end{aligned}$$

i uzupełnione jest warunkami:

$$S_{0,1}^{j+1} = S_{1,1}^{j+1}, \quad S_{N,1}^{j+1} = S_{N+1,1}^{j+1}, \quad i = 1, 2, \dots, M.$$

W ten sposób otrzymujemy układ $N+2$ równań z $N+2$ niewiadomymi $\theta_{i,1}^{j+1}$, $i = 0, 1, \dots, N+1$. Ponieważ $l = 1, \dots, M$, mamy M układów o trójdziagonalnych i dodatnio określonych macierzach. Uzyskane z pierwszego etapu $\theta_{i,1}^{j+1/2}$ służą teraz jako wstępne przybliżenia i po rozwiązaniu M układów można określić rozkład wilgotności w przestrzeni (ξ, z, t) dla ustalonego $t = t^j$.

W celu dodatkowej kontroli w programie jest obliczany całkowity wzrost wilgotności w układzie i gdy przekracza on wartość określoną przez funkcję wydajności źródeł dla danej chwili następuje zmniejszenie odległości między punktami węzłowymi siatki, tj. zmniejszenie "h". Nowe "h" służy do powtórnego obliczenia wszystkich wielkości dla tego momentu czasu. Ponadto, gdy błąd po iteracyjnym rozwiązywaniu nieliniowych układów równań jest większy od zadanego dopuszczalnego błędu, redukowany jest krok czasu k_p i obliczenia są powtarzane.

Dane do programu były podawane w postaci tabelarycznej jako funkcje $K(\theta)$, $S(\theta)$ oraz funkcja wydajności źródeł $f(t)$.

Miedzy otrzymanymi z obliczeń rezultatami a pomiarami eksperymentalnymi można zaobserwować pewne rozbieżności. Są one dość znaczne dla bardzo małych i bardzo dużych natężeń wypływu ze źródeł, jednakże w ograniczonym zakresie prędkości wypływu zgodność jest dostateczna do praktycznych zastosowań przy projektowaniu nawodnień.

Przedstawione numeryczne rozwiązania problemu infiltracji są wybrane z wielu publikacji pojawiających się w piśmiennictwie w ostatnich latach. Zainteresowanie zagadnieniem wynika niewątpliwie z wagi problemu infiltracji, co zmusza do szukania coraz lepszych i dokładniejszych rozwiązań.

ZAGADNIENIE ODWADNIANIA GLEBY I JEJ WYSYCHANIA

Jedną z pierwszych prób wykorzystania techniki numerycznej do znalezienia rozkładu wilgotności w profilu glebowym podczas procesu osuszania drogą odpływu grawitacyjnego wody była praca Daya i Luthina /10/ z 1956 r. Autorzy rozpatrywali problem powolnego odwadniania warstwy gleby. Równaniem podstawowym było (2). Jednakże, jak okazało się później, wyniki otrzymane w pracy /10/ różniły się znacznie od wyników eksperymentalnych, ponadto proponowany program okazał się nieekonomiczny pod względem wymaganego czasu pracy maszyny cyfrowej. Watson /49/ oraz Whisler i Watson /56/ dla tego samego zagadnienia podali rozwiązania oparte na dwóch równaniach różniczkowych:

$$p \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[D \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] + \frac{\partial K}{\partial x},$$

w pracy /49/, zaś w pracy /56/ na równaniu:

$$C \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[K \frac{\partial h}{\partial x} \right] + \frac{\partial K}{\partial x},$$

gdzie:

D - współczynnik dyfuzji równy $K(\partial h / \partial \theta) / p$,

C - różniczkowa pojemność gleby równa $p \cdot \partial \theta / \partial h$,

p - porowatość gleby.

Metoda obliczeń jaką zastosował Watson jest w zasadzie analogiczna do metody Daya i Luthina, ale jej rezultaty okazały się lepsze. Wynika to z faktu, że w odpowiednich równaniach różnicowych używano, w przeciwieństwie do pracy /10/, małego kroku względem czasu; prócz tego metoda laboratoryjnego pomiaru fizycznych właściwości gleby wchodzących jako dane do obliczeń była bardzo dokładnie opracowana i sprawdzona. Do programu zadawano h w funkcji wilgotności oraz K w funkcji wilgotności. Wyniki otrzymane w pracach /49/ i /56/ zostały później potwierdzone przez Kastanka /21/, który badał odwadnianie pionowej kolumny gleby z wilgotnością początkową równą pełnemu nasyceniu. Przy danych: przewodności hydraulicznej $K [m \cdot s^{-1}]$ i wilgotności gleby θ [% objętości] stabilizowanych względem ciśnienia ssącego gleby h [m słupa $H_2O \approx$

$\approx 10^{-2} \text{ hPa}]$ możliwe jest obliczenie ilości wody $Q \text{ [m}^3]$ wypływającej z kolumny gleby w danym momencie czasu oraz znalezienie rozkładu gradientu potencjału wody glebowej w kolumnie. Podstawą do obliczeń jest bilans wodny dla małych warstw gleby. Cała kolumna gleby składa się z cienkich warstw charakteryzowanych przez przewodność hydrauliczną i wilgotność. Na skutek działania gradientu potencjału następuje przejście warstwy ze stanu nasycenia do stanu nienasycenia - tzn. zmienia się położenie frontu osuszania. Program wylicza, na podstawie danych właściwości wodnych gleby, ilość warstw, ich grubości i rozmieszczenie w funkcji czasu. Autor przedstawił porównanie własnych wyników obliczeń z wynikami badań eksperymentalnych oraz z wynikami otrzymanymi za pomocą innych metod obliczeniowych [49, 56]. Zgodność rezultatów jest zadowalająca.

Problem odwadniania gleby drogą obniżania poziomu zwierciadła wody grunтовой był również rozpatrywany przez Rubina [38]. Rozszerzył on metodę zaprezentowaną wcześniej dla infiltracji [37] (tj. obliczenia na bazie transformacji Kirchoffa) na przypadek dwuwymiarowy.

Równaniem opisującym proces drenażu jest:

$$C(H - z) \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[K(H - z) \frac{\partial H}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[K(H - z) \frac{\partial H}{\partial z} \right], \quad (19)$$

gdzie:

x - współrzędna pozioma,

z - współrzędna pionowa,

$H = (h + z)$ - ciśnienie ssące wody glebowej,

$C(H - z) = C(h)$ - różniczkowa pojemność wodna gleby.

Wartości $C(h)$ odpowiadają wartościom pochodnej funkcji $\partial \theta / \partial h$. W warunkach nasycenia $C(h) = 0$.

Granice obszaru, w którym jest analizowane zjawisko osuszania, są określone nierównościami: $0 \leq x \leq L$, $0 \leq z \leq D$. Stała L jest równa połowie odległości między dwoma punktami, w których jest obniżane lustro wody (np. umieszczone są sączki drenarskie).

Niech z_w oznacza początkowe położenie lustra wody, z_d - jego położenie końcowe, $z_s(t)$ - jego położenie po czasie t . Funkcja $z_s(t)$ winna spełniać warunek $z_s(0) = z_w$.

Warunkami początkowymi są:

$$H = z_w, \quad x \in (0, L), \quad z \in (0, D), \quad t = 0,$$

$$H = z_w, \quad x = 0, \quad z \in (z_w, D), \quad t = 0.$$

Ponieważ obszar między z_d a $z_s(t)$ wzdłuż osi Oz tj. dla $x = 0$ jest charakteryzowany przez $h = 0$, stąd na granicach obszaru mamy warunki:

$$H = z_d, \quad x = 0, \quad z \in (0, z_d), \quad t \geq 0,$$

$$H = z, \quad x = 0, \quad z \in (z_d, z_s(t)), \quad t \geq 0,$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = 0, \quad x = 0, \quad z \in (z_s(t), D), \quad t \geq 0,$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = 0, \quad x = L, \quad z \in (0, D), \quad t \geq 0,$$

$$\frac{\partial H}{\partial z} = 0, \quad x \in (0, L), \quad z = 0, \quad z = D, \quad t \geq 0,$$

Po przekształceniu analogicznym jak w pracy [37], procedura numeryczna sprowadza się do rozwiązywania metodą iteracji układu równań różnicowych otrzymanych na podstawie równania (19) i uzupełniających go warunków początkowych i brzegowych względem wprowadzonych przez transformację Kirchoffa zmiennych. Po zastosowaniu przekształcenia odwrotnego wyników, otrzymuje się rozkład potencjału wody glebowej w przestrzeni (x, z) dla zadanej chwili. Do obliczeń wymagana jest znajomość stałych L, D, z_w, z_d oraz funkcji przewodności hydraulicznej gleby i wilgotności względem potencjału wody glebowej. Funkcja $z_s(t)$ jest określana w trakcie obliczeń z warunkiem początkowym $z_s(0) = z_w$.

Innym ważnym zjawiskiem, podczas którego wilgotność gleby obniża się, jest parowanie wody z gleb bez pokrycia roślinnego. Obliczenie szybkości i ilości traczonej wody, wyznaczenie rozkładu wilgotności w profilu, zwłaszcza w pobliżu powierzchni gleby, było zasadniczym celem opracowania Van Keulena i Hillela [44].

W trakcie procesu ewaporacji następuje rozwój frontu osuszania, który posuwa się ku niższym warstwom gleby. Front ten ma oczywiście swoje odzwierciedlenie w charakterystycznym przebiegu krzywych rozkładu wil-

gotności w profilu glebowym. Proces wysychania gleby opisany został równaniem dyfuzji (4), które po zastosowaniu transformacji Boltzmanna było przekształcone do zwykłego równania różniczkowego. W pracy badano wpływ typu funkcyjnej zależności współczynnika dyfuzji $D(\theta)$ na szybkość przepływu wody i kształt rozkładu wilgotności w górnej części profilu. Zagadnienie było skomplikowane, ponieważ współczynnik dyfuzji dla przepływu wody w fazie cieczy jest rosnącą wykładniczą funkcją wilgotności, a współczynnik dyfuzji pary wzrasta w czasie trwania procesu wysychania. Dla uproszczenia przyjęto warunki izotermiczne, jednorodną glebę, brak grawitacji oraz założono, że w chwili początkowej powierzchnia gleby jest powietrznie sucha. Równanie różniczkowe było rozwiązywane dla odpowiednich warunków początkowych i brzegowych. Stosowano różne procedury obliczeniowe dla współczynnika dyfuzji, a mianowicie przyjmowano D jako względnie stałe w obszarze suchym i rosnące zgodnie z funkcją wykładniczą w obszarze wilgotnym.

Następnym zagadnieniem, którego analizę umożliwiły metody numeryczne, była ocena wpływu sposobu nawilżania na wysychanie gleby. Eksperyment Breslera i Kempera [5] obejmował nawilżanie próbek w różny sposób: przez zalewanie, przez deszczowanie, przez deszczowanie z uprzednim dodaniem NaCl. Dla każdej z metod empirycznie znajdowano funkcję wilgotności względem ciśnienia ssącego gleby podczas procesu osuszania. Rejestrowano ponadto zmiany ciśnienia ssącego w czasie, co pozwoliło na określenie wilgotności w funkcji czasu dla wszystkich głębokości. Na tej podstawie obliczano zmianę uwilgotnienia gleby θ [$\text{m}^3 \cdot \text{m}^{-3}$] w czasie, tj. $\partial\theta/\partial t$ dla dowolnej głębokości x_i i chwili t^j .

Równanie przepływu przetransformowano do postaci układu równań różnicowych na dyskretnej siatce punktów w czasie i przestrzeni:

$$-\sum_{k=1}^i \left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)_k^j (x_{i+1/2}^j - x_{i-1/2}^j) = -J_0^j + K_{i+1/2}^j \frac{H_{i+1}^j - H_i^j}{x_{i+1}^j - x_i^j} \quad (20)$$

gdzie:

i - wskaźnik odpowiadający głębokości (zero dla powierzchni);

j - indeks wyznaczający moment czasu;

J_0^j - strumień przepływający przez powierzchnię równy szybkości parowania w chwili t^j [$m \cdot s^{-1}$];

K_1^j - współczynnik przewodności wodnej gleby [$m \cdot s^{-1}$];

H_1^j - ciśnienie ssące gleby [m słupa $H_2O \approx 10^{-2} hPa$].

Jeżeli znana jest zależność K od θ lub H od θ , układ (20) może służyć do obliczania strumienia przepływającego przez powierzchnię gleby, natomiast gdy z pomiaru dane jest J_0^j , $j = 0, 1, \dots$, wtedy wzór (20) można przekształcić do postaci:

$$K_{i+1/2}^j = \frac{J_0^j - \sum_{k=1}^i \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)_k^j (x_{i+1/2}^j - x_{i-1/2}^j)}{(H_{i+1}^j - H_1^j) / (x_{i+1}^j - x_1^j)},$$

co pozwala na określenie współczynnika przewodności wodnej gleby.

Otrzymane wyniki są zgodne z pomiarami laboratoryjnymi. Stwierdzono, że strumień przepływający przez powierzchnię, który w przypadku zalewania próbki wynosił około $828 m \cdot s^{-1}$ maleje do około $39,6 m \cdot s^{-1}$ w przypadku deszczowania i do około $2,1 m \cdot s^{-1}$ dla deszczowania z uprzednim stosowaniem NaCl. Potwierdzono w ten sposób znaczenie powstawania pod powierzchnią gleby warstewki, której struktura uległa zniszczeniu pod wpływem uderzeń kropli deszczu.

Praktyczny aspekt zastosowania numerycznego rozwiązania równania przepływu pokazał w 1964 r. Dagan [9]. Problem polegał na określeniu fluktuacji lustra wody powodowanych opadami deszczowymi i wyznaczeniu właściwego rozmieszczenia drenów.

Założono, że dreny są umieszczone na poziomie lustra wody gruntowej, a drenowana przepuszczalna warstwa gleby jest głęboka, jednorodna i izotropowa. Rozważano przypadek opadów deszczowych o zmiennej skokowo intensywności R [$mm \cdot doba^{-1}$]. W czasie $t = 0$ lustro wody gruntowej jest w stanie równowagi. R jest wtedy stałe i równe R_0 .

Przyjęto, że przestrzeń jest dwuwymiarowa, przy czym x oznacza współrzędną poziomą, zaś y - współrzędną pionową. Funkcja $\eta(x, t)$ obrazuje kształt powierzchni lustra wody. Dreny leżą w odległości $2 \cdot l$ od siebie, stąd maksimum funkcji η leży w punkcie o współrzędnej x równej l ,

$$n \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + K \frac{\partial \Phi}{\partial y} + R \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -K \cdot R,$$

gdzie "n" jest porowatością.

Kształt powierzchni obszaru nasyconego od góry ("swobodnej powierzchni") jest określony równaniem:

$$\eta(x, t) = -\Phi(x, \eta, t)/K.$$

W celu rozwiązania powyższego problemu, przyjęto uproszczenia:

1. przepuszczalna warstwa ma nieskończoną głębokość, tzn. $H \rightarrow \infty$,
2. dren jest rozumiany jako ujemne źródło, a obwód drenu jest wyznaczony przez linię ekwipotencjalną w odległości $r = \delta$ od środka drenu (ponieważ Φ jest w praktyce stałe na DEF i powierzchni ekwipotencjalne w pobliżu źródła są okręgami),

3. wyrazy w drugiej potęgze można zaniedbać.

Na podstawie tych uproszczeń mamy:

$$n \frac{\partial \Phi}{\partial t} + K \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -K \cdot R \quad \text{dla } y = 0 \text{ zamiast } y = \eta(x, t).$$

Równanie swobodnej powierzchni ma postać:

$$\eta(x, t) = -\Phi(x, 0, t)/K.$$

Jest to równoważne przyjęciu, że obszar powyżej $y = 0$ został zastąpiony przez ciało o takiej samej porowatości n, ale o przewodności w kierunku horyzontalnym $K_x = 0$ i w kierunku pionowym $K_y = \infty$. Warunek ten jest spełniony, jeśli $\eta_{\max} \ll 1$. Tym samym funkcja $\Phi(x, y, t)$ spełnia w obszarze ABGOA (rys. 9) równanie Laplace'a z warunkami brzegowymi:

na OA tzn. dla $x = 0$ i na GB tzn. dla $x = 1$: $\partial \Phi / \partial x = 0$,

na OG tzn. dla $y = 0$: $n \cdot \partial \Phi / \partial t + K \cdot \partial \Phi / \partial y = -K \cdot R$,

przy AB (dla $y \rightarrow -\infty$): $\Phi \rightarrow 0$,

przy O (dla $x = 0, y = 0$) Φ ma osobliwość logarytmiczną.

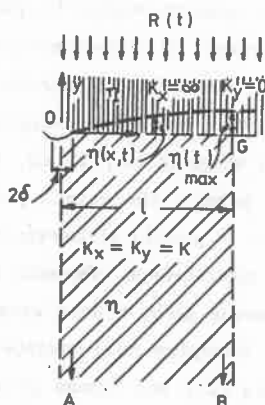
Warunkiem początkowym jest: $\Phi(x, 0, 0) = -K \cdot \eta_0(x)$.

Można ponadto założyć, że swobodna powierzchnia osiąga dren w punkcie E, tzn. dla $x = \delta, y = 0$, stąd:

$$\eta(\delta, t) = -\Phi(\delta, 0, t)/K = 0.$$

Ponieważ przy podanych uproszczeniach funkcja ϕ spełnia równania liniowe, możliwa jest superpozycja rozwiązań.

W ten sposób przez linearyzację warunków brzegowych, rozwiązanie problemu rozmieszczenia drenów dla wystarczająco ogólnych zmian intensywności opadów deszczowych sprowadza się do numerycznego rozwiązania równania całkowego Volterry I rodzaju.



Ryc. 9. Przepływ w kierunku drenu. Rozwiązanie z uproszczeniami

PROBLEM HISTEREZY

W dotychczas wspomnianych pracach przyjmowano, że relacja między ciśnieniem ssącym gleby a jej wilgotnością jest związkiem jednoznacznym, tj. dla ustalonej wartości ciśnienia istnieje dokładnie jedna odpowiadająca jej wartość wilgotności dla danej gleby. Założenie to mogło wprowadzić dodatkowy błąd do obliczeń, ponieważ relacje między wielkościami fizycznymi charakteryzującymi stan układu woda-gleba-powietrze nie mogą być opisane za pomocą jednoznacznych funkcji. Podstawowa charakterystyka wodna gleby, tj. związek między potencjałem wody glebowej a uwilgotnieniem, jest obarczona histerezą. Pojawienie się histerezy jest związane z różnymi potencjałami przy zapełnianiu i przy opróżnianiu porów w glebie [32]. Ciśnienie kapilarne jest wyższe podczas osuszania niż podczas procesu zwilżania gleby przy tej samej wilgotności. Wynika stąd, że przy osuszaniu stan układu glebowego opisuje inna krzywa, niż przy nawilżaniu. Obie te krzywe (nazywane głównymi lub brzegowymi) mają dwa punkty wspólne, są to punkty o współrzędnych: minimalna wilgotność i maksymalne ciśnienie

nie ssące gleby oraz wilgotność nasycenia i minimalne ciśnienie ssące. Pole zawarte między krzywymi brzegowymi nazywane jest polem pętli histerezy. W termodynamicznej teorii procesów nieodwracalnych stwierdzono, że każdy z punktów leżących w obszarze ograniczonym głównymi krzywymi może być osiągnięty na drodze różnych zmian ciśnienia ssącego i wilgotności [11, 12, 13, 14/.

Jedną z pierwszych prób uwzględnienia w analizie rozkładów wilgotności w profilu glebowym zjawiska histerezy było numeryczne opracowanie nieliniowego równania dyfuzji dla przepływu wody w horyzontalnej kolumnie gleby podane przez Klutego i współaut. [23/ w 1965 r.

Przepływ miał miejsce w kolumnie o skończonej długości L . Do równania (4), bez członu grawitacyjnego, zostały przyjęte następujące warunki:

1. początkowy: $\theta(x, 0) = \theta_s$, $x \in (0, L)$, $t = 0$,
2. brzegowe: $\theta(0, t) = \theta_b$, $t \geq 0$,

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{x=L} = 0, \quad t \geq 0,$$

gdzie θ_s i θ_b są stałymi.

Przyjęto, że związek dyfuzyjności $D[m^2 s^{-1}]$ i wilgotności θ ma postać funkcji wykładniczej: $D(\theta) = \alpha \exp(\beta \theta)$ z parametrami α i β . Badano dwa procesy: infiltrację kiedy $\theta_b > \theta_s$ oraz wysychanie kiedy $\theta_b < \theta_s$.

Po wprowadzeniu zmiennych bezwymiarowych:

$$\Omega = \frac{\theta(x, t) - \theta_b}{\theta_s - \theta_b},$$

$$\xi = x/L,$$

$$\tau = \alpha t \exp(\beta \theta_b) / L^2,$$

do równania:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right),$$

zastąpiono pochodne cząstkowe ilorazami różnicowymi. Z otrzymanego nie-

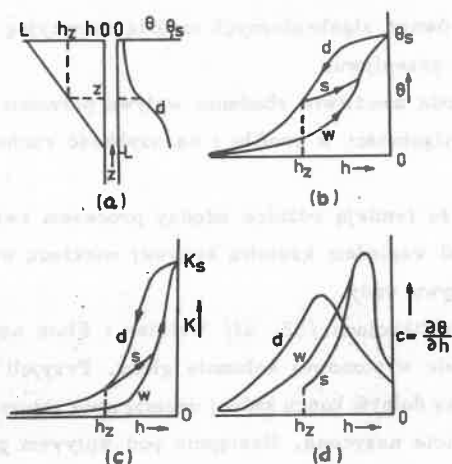
liniowego układu równań algebraicznych metodą iteracyjną znajdowano rozwiązanie równania przepływu.

Powyższa metoda umożliwia zbadanie wpływu parametrów α i β na kształt rozkładu wilgotności w profilu i na szybkość ruchu wody w ośrodku porowatym.

Stwierdzono, że istnieją różnice między procesem zwilżania a osuszania zarówno pod względem kształtu krzywej rozkładu wilgotności, jak i prędkości przepływu wody.

W kolejnych publikacjach [52, 53] Whisler i Klute nadal brali pod uwagę histerezę, ale w pionowej kolumnie gleby. Przyjęli oni, że próbka o długości L , przy dolnym końcu której umieszczono zbiornik wodny, jest początkowo całkowicie nasyciona. Następnie pod wpływem grawitacji próbka ulega procesowi odwadniania. Rozkład wilgotności jest niejednorodny i zmienia się od małej wartości przy szczycie kolumny do nasycenia przy dnie. Jeżeli następnie na górnej granicy kolumny utrzymywać się będzie niewielka warstwa wody, to będzie zachodzić proces infiltracji i po pewnym czasie przepływ w kolumnie ustali się. Na skutek histerezy między wilgotnością a ciśnieniem uwilgotnienie każdej warstwy gleby charakteryzuje inna funkcja. W każdym punkcie kolumny dzięki infiltracji następować będzie monotoniczny wzrost wilgotności i spadek ciśnienia ssącego z czasem. Obrazem funkcji opisującej to zjawisko jest wewnętrzna krzywa zwilżania pętli histerezy, mająca początek w punkcie $h = -(z + L)$ na osi ciśnienia (rys. 10a, b), gdzie z jest głębokością rozważanego punktu poniżej szczytu kolumny (oś Oz dodatnia ku górze). Na rys. 10 pokazany jest typowy przykład zależności między ciśnieniem ssącym h , wilgotnością θ a głębokością z (rys. 10a), ciśnieniem a wilgotnością (rys. 10b), przewodnością hydrauliczną K a ciśnieniem ssącym (rys. 10c) oraz różniczkową pojemnością wodną gleby C a ciśnieniem (rys. 10d).

Argumentami funkcji K i C są: ciśnienie ssące i głębokość z . Na podstawie znajomości wartości funkcji $\theta(h, z)$, $K(h, z)$ oraz głównej krzywej osuszania i wewnętrznych krzywych zwilżania, po zastosowaniu przekształceń do postaci bezwymiarowej ($\varphi = h/L$, $\rho = z/h$), wyznaczono funkcję pojemności wodnej gleby metodą numerycznego różniczkowania funkcji $Q(\varphi, \rho) = \theta(h, z)/\theta_s$ (θ_s oznacza tu wilgotność nasycenia) względem φ .



Rys. 10. Związki między: (a) ciśnieniem ssącym h , wilgotnością θ i głębokością z ; (b) wilgotnością i ciśnieniem; (c) współczynnikiem przewodności wodnej K i ciśnieniem; (d) różniczkową pojemnością wodną C i ciśnieniem

Po przejściu do różnic skończonych i rozwiązaniu otrzymanego układu równań uzyskuje się związek między ciśnieniem, głębokością i czasem.

Za pomocą metody Whislera i Klutego można badać wpływ histerezy na rozkład ciśnienia w profilu glebowym. W tym celu odrębnie rozwiązano problem dla głównej krzywej zwilżania i odrębnie dla głównej krzywej osuszania oraz dla całego zbioru krzywych (tj. krzywych brzegowych i wszystkich dostępnych krzywych wewnętrznych). Dla porównania, wybrano na środku frontu zwilżania wartość Q i obserwowano jej ruch dla trzech wyżej wymienionych przypadków. Okazało się, że po uwzględnieniu zjawiska histerezy otrzymano krzywą leżącą pod krzywą uzyskaną na podstawie procesu osuszania, a nad krzywą wynikającą z obliczeń opartych tylko o krzywą zwilżania.

Metoda Whislera i Klutego umożliwia porównanie zachowania się frontu zwilżania w różnych glebach. Takie porównania autorzy przeprowadzili w dwojaki sposób: 1° - przyjęli, że długość L jest stała, a badali gleby

z różnymi charakterystykami, 2° - przyjęli, że charakterystyki wodne są identyczne, zaś próbki umieszczone są w kolumnach o różnej długości. We wszystkich eksperymentach numerycznych otrzymane wyniki znacznie różnią się między sobą.

Wstępna informacja o krzywych wewnętrznych histerezy, jakiej wymaga powyższa metoda jest zwykle trudno dostępna. Dane takie nie są potrzebne do programu skonstruowanego przez Rubina [36, 38], który nieco inaczej włączył histerezę do analizy izotermicznego rozkładu wilgotności po procesie infiltracji w półnieskończonej nienasyconej (z wyjątkiem powierzchni) kolumnie gleby. Wprowadził on trzy dodatkowe, upraszczające założenia:

1. na dowolnej głębokości i w dowolnej chwili istnieje jednoznaczny związek między wilgotnością θ a ciśnieniem ssącym h ;
2. podczas rozkładu wilgotności w profilu następującego po procesie infiltracji element gleby znacznie osuszony nie nawilża się ponownie - umożliwia to branie do dalszej analizy tylko głównych krzywych pętli histerezy i krzywych wewnętrznych osuszania I rzędu (tj. mających początek na głównej krzywej zwilżania);
3. histereza między przewodnością wodną gleby a wilgotnością jest mała i może być pominięta.

Badany przepływ opisuje równanie:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[K \frac{\partial h}{\partial x} - K \right], \quad (21)$$

gdzie:

θ - uwilgotnienie gleby $[m^3 m^{-3}]$;

h - ciśnienie ssące $[m \text{ słupa } H_2O \approx 10^{-2} \text{ hPa}]$;

K - przewodność hydrauliczna gleby $[m \cdot s^{-1}]$;

z warunkami:

$$\theta = \theta(x), \quad x > 0, \quad t = 0, \quad (22)$$

$$Q = -K \frac{\partial h}{\partial x} + K = 0, \quad x = 0, \quad t > 0, \quad (23)$$

$$\theta = \theta_1, \quad x = \infty, \quad t > 0, \quad (24)$$

Q - strumień przepływający przez powierzchnię $[m \cdot s^{-1}]$;

θ_i - stała wilgotność na nieskończonej głębokości;

$\theta(x)$ - wilgotność w funkcji głębokości opisująca dany profil początkowy.

Do opisu krzywych obrazujących relacje: ciśnienie ssące - wilgotność użyto równań empirycznych:

$$h_w(\theta) = g + \frac{m}{\theta - n} + r \cdot \exp(p \cdot \theta), \quad (25)$$

$$h_d(\theta) = g' + \frac{m'}{\theta - n'}, \quad (26)$$

$$h_s(\theta) = h_d(\theta) + \exp[-c(\theta_{BS} - \theta)] \cdot (h_w(\theta) - h_d(\theta)), \quad (27)$$

c , g , m , n , p , r , g' , m' , n' są wyznaczonymi doświadczalnie stałymi. Równanie (25) opisuje główną krzywą zwilżania, (26) - krzywą brzegową osuszania, (27) - krzywe wewnętrzne osuszania wraz z krzywą brzegową. Za pomocą parametru θ_{BS} , który w danym momencie charakteryzuje zależność ciśnienia ssącego i uwilgotnienia, z rodziny krzywych wewnętrznych jest wyznaczana jedna funkcja. Parametr θ_{BS} jest zmienny w przedziale: $\max(n, n') < \theta_{BS} < \theta_{SAT}$ (θ_{SAT} - wilgotność nasycenia). Gdy θ osiąga wartość θ_{BS} wtedy $h_s(\theta) = h_w(\theta)$ i taka wartość θ_{BS} reprezentuje wilgotność, przy której dana krzywa wewnętrzna osuszania łączy się z główną krzywą zwilżania. Dla $\theta_{BS} = \theta_{SAT}$ równanie (27) jest równaniem krzywej brzegowej osuszania. W celu osiągnięcia większej dokładności wielkości stałej "c" może być zastąpiona liniową funkcją θ_{BS} . Po wprowadzeniu zmiennej $S = dh/d\theta$, równanie (21) ma postać:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[K \cdot S \frac{\partial \theta}{\partial x} - K \right],$$

iloczyn $K \cdot S$ jest zwykle nazywany współczynnikiem dyfuzyjności gleby względem wody i oznaczany $D[m^2 s^{-1}]$. Warunki (22), (24) nie ulegają zmianie, natomiast (23) przyjmuje formę:

$$Q = -K \cdot S \frac{\partial \theta}{\partial x} + K = 0, \quad x = 0, \quad t > 0. \quad (28)$$

Po przejściu do różnic skończonych otrzymuje się układ (indeks dolny dla przestrzeni, indeks górny dla czasu):

$$-\hat{A}_j \theta_{j+1}^{n+1} + \hat{B}_j \theta_j^{n+1} - \hat{C}_j \theta_{j-1}^{n+1} = \hat{D}_j \quad (29)$$

gdzie:

$$\hat{A}_j = (\Delta t / \Delta x^2) K(\theta_{j+1/2}^{n+1/2}) S(\theta_{j+1/2}^{n+1/2}),$$

$$\hat{C}_j = (\Delta t / \Delta x^2) K(\theta_{j-1/2}^{n+1/2}) S(\theta_{j-1/2}^{n+1/2}),$$

$$\hat{B}_j = 2 + \hat{A}_j + \hat{C}_j,$$

$$\begin{aligned} \hat{D}_j = & \hat{A}_j \theta_{j+1}^n + (2 - \hat{A}_j - \hat{C}_j) \theta_j^n + \hat{C}_j \theta_{j-1}^n - 2(\Delta t / \Delta x) \left[K(\theta_{j+1/2}^{n+1/2}) - \right. \\ & \left. - K(\theta_{j-1/2}^{n+1/2}) \right]. \end{aligned}$$

Warunek (28) daje równanie różnicowe:

$$-\hat{A}_1 \theta_2^{n+1} + \hat{B}_1 \theta_1^{n+1} = \hat{D}_1 \quad (30)$$

przy czym:

$$\hat{A}_1 = (\Delta t / \Delta x^2) K(\theta_{1+1/2}^{n+1/2}) S(\theta_{1+1/2}^{n+1/2}),$$

$$\hat{B}_1 = 2 + \hat{A}_1,$$

$$\hat{D}_1 = \hat{A}_1 \theta_2^n + (2 - \hat{A}_1) \theta_1^n - 2(\Delta t / \Delta x) \left[K(\theta_{1+1/2}^{n+1/2}) - Q \right].$$

Wzory (29) i (30) są określone na siatce punktów: $x = (j - 1/2) \Delta x$, $t = n \Delta t$, Δx i Δt są odległościami między węzłami siatki, "j" zmienia się od 1 do J, tj. na głębokości $(J - 1/2) \Delta x$ wilgotność jest stała; "n" - wskaźnik czasu - zmienia się od zera, przy czym $n = 0$ dla momentu w którym kończy się infiltracja.

Dla obliczenia wartości funkcji $K(\theta_{j\pm 1/2}^{n+1/2})$, $S(\theta_{j\pm 1/2}^{n+1/2})$ stosowane są oceny wilgotności: $\theta_{j+1}^{n+1/2}$, $\theta_{j-1}^{n+1/2}$, $\theta_j^{n+1/2}$, które są uzyskiwane metodą ekstrapolacji θ z dwóch poprzednich chwil:

$$(\theta_{j-1}^{n+1/2})_{\text{est}} = 1,5 \cdot \theta_{j-1}^n - 0,5 \cdot \theta_{j-1}^{n-1},$$

$$(\theta_j^{n+1/2})_{\text{est}} = 1,5 \cdot \theta_j^n - 0,5 \cdot \theta_j^{n-1},$$

$$(\theta_{j+1}^{n+1/2})_{\text{est}} = 1,5 \cdot \theta_{j+1}^n - 0,5 \cdot \theta_{j+1}^{n-1}.$$

Argumentami funkcji K i S są wielkości:

$$\theta_{j\pm 1/2}^{n+1/2} = 0,5 \cdot \left[(\theta_j^{n+1/2})_{\text{est}} + (\theta_{j\pm 1}^{n+1/2})_{\text{est}} \right].$$

Jeśli dla $j = 1, 2, \dots, J$ wartości θ są znane w punktach $(n-1)\Delta t$ oraz $n\Delta t$, wtedy z powyższych równań i z definicji współczynników $\hat{A}_j$, $\hat{B}_j$, $\hat{C}_j$, $\hat{D}_j$, po znalezieniu wielkości tych współczynników, można je wstawić do wzorów (29) i (30). Równania (29) zapisane dla $j = 2, 3, \dots, J-1$ i równanie (30) po uzupełnieniu warunkiem $\theta_j^{n+1} = \theta_i$, dają układ J równań z J niewiadomymi. Układ ten daje się rozwiązać standardowymi metodami. Rozwiązaniem jest θ_j^{n+1} dla $j = 1, \dots, J$.

W trakcie procesu obliczeniowego prowadzone jest badanie, czy uwilgotnienie któregoś z punktów siatki nie maleje i wtedy brana jest pod uwagę histereza określona równaniami (25) (26) i (27). Na każdym etapie obliczeń dostępna jest informacja, która z krzywych rodziny histerezy określa aktualnie zachodzący w glebie proces. Z każdym punktem siatki $((j-1/2)\Delta x, n\Delta t)$ sprzężona jest wartość u_j^n wskazująca, czy dla danych j, n należy uwzględnić histerezę i poprzez którą krzywą. Algorytm postępowania jest następujący: gdy $u_j^n = 0$ obowiązuje wzór (25) brzegowej krzywej zwilżania, natomiast gdy $u_j^n > 0$, wtedy wielkość u_j^n jest równa wartości parametru θ_{BS} i zachodzi proces osuszania określony wzorami (26) i (27). Określenie kolejnego u_j^{n+1} rozdziela się na dwa przypadki, dla $u_j^n > 0$ przyjmowane jest po prostu $u_j^{n+1} = u_j^n$, natomiast dla $u_j^n = 0$ badane są dwa sąsiednie punkty w przestrzeni tj. u_{j-1}^n oraz u_{j+1}^n . Może wtedy zachodzić:

$$1. u_{j-1}^n = u_{j+1}^n = 0,$$

$$2. u_{j-1}^n > 0, u_{j+1}^n = 0,$$

$$3. u_{j-1}^n = 0, u_{j+1}^n > 0,$$

$$4. u_{j-1}^n > 0, u_{j+1}^n > 0,$$

Zakłada się, że punkty 3 i 4 są wykluczone (zwilżanie powyżej warstw podlegających suszeniu). Dla 1 i 2 są obliczane i porównywane ze sobą strumienie wpływające i wypływające z danej warstwy gleby.

W przypadku 1 strumień wpływający do warstwy na głębokości "j" jest zdefiniowany jako:

$$Q_{IN} = -K(\theta_{j-1/2}^n) \left[S(\theta_{j-1/2}^n) (\theta_j^n - \theta_{j-1}^n) / \Delta x - 1 \right],$$

a wpływający z tej samej warstwy jako:

$$Q_{OUT} = -K(\theta_{j+1/2}^n) \left[S(\theta_{j+1/2}^n) (\theta_{j+1}^n - \theta_j^n) / \Delta x - 1 \right].$$

Jeżeli $Q_{IN} < Q_{OUT}$ przyjmuje się $u_j^{n+1} = \theta_j^n$, w przeciwnym przypadku przyjmuje się $u_j^{n+1} = 0$.

Gdy zachodzi przypadek 2 (oznacza to, że warstwa na głębokości $(j-1)$ jest suszona, a warstwy j i $(j+1)$ są zwilżane), wtedy do obliczenia strumienia wpływającego do elementu na poziomie j -tym używany jest wzór:

$$Q_{IN} = -K(\theta_{j+1/2}^n) \left[(h_w(\theta_j^n) - h_s(\theta_{j-1}^n)) / \Delta x - 1 \right],$$

gdzie $h_s(\theta_{j-1}^n)$ jest obliczone na podstawie (27) z $\theta_{BS}^n = u_{j-1}^n$. Strumień wypływający Q_{OUT} określony jest tak jak w przypadku 1. Obydwa strumienie są porównywane i wyniki są przyjmowane analogicznie do przypadku 1.

Powyższy algorytm umożliwia określenie u_j^{n+1} dla $j = 2, \dots, J-1$. Wartości u_1^{n+1} oraz u_J^{n+1} są zdefiniowane inaczej. Z warunków całego zagadnienia wynika, że u_J^{n+1} jest zawsze równe zeru. Wielkość u_1^{n+1} jest wyznaczona przez porównanie $Q_{IN} = 0$ (strumień przepływający przez powierzchnię, wzór (23)) z Q_{OUT} wyliczonym w zwykły sposób.

Rubin wprowadził dodatkowe modyfikacje przy określaniu argumentów funkcji K i S w celu poprawienia aproksymacji.

Na końcu obliczeń dla danej chwili, przeprowadzane jest badanie, czy nie zdarza się dla wyższych warstw ponowny wzrost uwilgotnienia

tj. czy $\theta_j^{n+1} > u_j^{n+1}$. Jeśli taka nierówność zachodzi, to wyniki są kaso-
wane i cykl obliczeniowy powtarzany po przyjęciu $u_j^{n+1} = 0$.

Opisana tutaj metoda Rubina zakładała brak przepływu strumienia
przez powierzchnię gleby. Możliwe jest jednak zastąpienie warunku (23)
nowym warunkiem:

$$Q = -K \partial h / \partial x + K, \quad x = 0, \quad t > 0,$$

gdzie Q jest stałą różną od zera lub funkcją h . Wówczas procedura do-
stosowana jest do sytuacji, gdy warunki na powierzchni są zmienne.

Podana przez Rubina metoda jest właściwa tylko dla procesów za-
chodzących przy przechodzeniu od zwilżania do osuszania, natomiast przy-
kładem ogólniejszego podejścia jest metoda Nierpina i współaut. [26].

W przypadku przepływu pionowego przyjęto równanie (2) z warun-
kami:

$$\begin{aligned} -(D(\theta) \partial \theta / \partial x - K(\theta))_{x=0} &= 0, \\ (D(\theta) \partial \theta / \partial x - K(\theta))_{x=L} &= 0, \\ \theta(x, t)_{t=0} &= \varphi(x), \end{aligned} \quad (31)$$

gdzie L oznacza grubość badanej warstwy gleby, a $\varphi(x)$ jest funkcją obra-
zującą początkowy rozkład wilgotności w profilu. Po wprowadzeniu zmien-
nych bezwymiarowych:

$$\begin{aligned} \xi &= x/L, \quad \xi \in (0, 1) \\ \tau &= t/T, \end{aligned}$$

przy czym $T = L^2/D_{\max}$, zaś $D_{\max}$ jest największą wartością współczyn-
nika dyfuzji, oraz po wprowadzeniu funkcji:

$$\begin{aligned} \nu(\theta) &= D(\theta)/D_{\max}, \quad \nu(\theta) \in (0, 1) \\ \chi(\theta) &= K(\theta)T/L, \end{aligned}$$

równanie przepływu przyjmuje postać:

$$\partial \theta / \partial \tau = \partial / \partial \xi \left[\nu(\theta) \partial \theta / \partial \xi - \chi(\theta) \right], \quad (32)$$

a warunki brzegowe i początkowe mają teraz formę:

$$-(\nu(\theta) \partial \theta / \partial \xi - \chi(\theta))_{\xi=0} = 0,$$

$$(\nu(\theta) \partial \theta / \partial \xi - \chi(\theta))_{\xi=1} = 0, \quad (33)$$

$$\theta(\xi, \tau)_{\tau=0} = \varphi(\xi).$$

Dyskretyzacja z krokiem $\Delta \tau$ i $\Delta \xi$ pozwala na przejście do różnic skończonych. Po uporządkowaniu otrzymuje się układ równań:

$$(\theta_i^j - \theta_i^{j-1}) = (\Delta \tau / \Delta \xi^2) \left[\delta (\nu_{i-1} \theta_{i-1}^j - (\nu_i + \nu_{i+1}) \theta_i^j + \nu_i \theta_{i+1}^j) + \right. \\ \left. + (1-\delta)(\nu_{i-1} \theta_{i-1}^{j-1} - (\nu_{i-1} + \nu_i) \theta_i^{j-1} + \nu_i \theta_{i+1}^{j-1}) - (\chi_i - \chi_{i-1}) \Delta \xi \right] \quad (34)$$

oraz

$$-\delta \nu_1 (\theta_2^j - \theta_1^j) - (1-\delta) \nu_1 (\theta_2^{j-1} - \theta_1^{j-1}) - \chi_1 \Delta \xi \Big|_{\xi=0} = 0, \\ \delta \nu_{n-1} (\theta_n^j - \theta_{n-1}^j) + (1-\delta) \nu_{n-1} (\theta_n^{j-1} - \theta_{n-1}^{j-1}) - \chi_{n-1} \Delta \xi \Big|_{\xi=1} = 0. \quad (35)$$

Symbol δ jest wagą w podanym schemacie różnicowym.

Układ (34) i (35) jest rozwiązywany metodą przegnania, tj. przyjmuje się, że szukana wilgotność θ_i^j jest liniową funkcją θ_{i+1}^j :

$$\theta_i^j = \alpha_i \theta_{i+1}^j + \beta_i \quad (36)$$

gdzie:

$$\alpha_1 = 1,$$

$$\beta_1 = \left[(1-\delta) \nu_1 (\theta_2^{j-1} - \theta_1^{j-1}) - \chi_1 \Delta \xi \right] / (\nu_1 \delta),$$

oraz:

$$\alpha_i = \delta \nu_i \Delta \tau / \left[\Delta \xi^2 - \Delta \tau \delta (\nu_{i-1} \alpha_{i-1} - \nu_{i-1} - \nu_i) \right], \quad (37)$$

$$\beta_i = \left[\delta \nu_{i-1} \beta_{i-1} + (1-\delta)(\nu_{i-1} \theta_{i-1}^{j-1} - (\nu_{i-1} + \nu_i) \theta_i^{j-1} + \nu_i \theta_{i+1}^{j-1}) - (\chi_i - \chi_{i-1}) \Delta \xi - \right. \\ \left. - \Delta \xi^2 \theta_i^{j+1} \right] / \left[\Delta \xi^2 - \Delta \tau \delta (\nu_{i-1} \alpha_{i-1} - \nu_{i-1} - \nu_i) \right]. \quad (38)$$

Po wyliczeniu α_{n-1} według (37) i β_{n-1} według (38), otrzymuje się liczbową wartość wilgotności na najniższym poziomie gleby:

$$\theta_n^j = \left[\beta_{n-1} \nu_{n-1} - (1-\delta) \nu_{n-1} (\theta_n^{j-1} - \theta_{n-1}^{j-1}) + \chi_{n-1} \Delta \xi \right] / \left[\delta \nu_{n-1} (1 - \alpha_{n-1}) \right].$$

Wszystkie pozostałe wilgotności są liczone na podstawie wzoru (36) z α i β określonymi przez (37) i (38), tylko θ_1^j ma odrębnie wyznaczone te współczynniki.

Ze względu na zależność współczynników γ_1 i χ_1 od uwilgotnienia, przyjęto iteracyjną metodę rozwiązywania układu.

W każdym kroku względem czasu, tj. dla $j - 1 = 2, 3, \dots$ analizowany jest znak pochodnej $\partial\theta/\partial\tau$. Gdy jest on ujemny, obliczenia są prowadzone z uwzględnieniem współczynnika dyfuzji dla procesu osuszania, w przeciwnym wypadku używa się współczynnika dla zwilżania. Współczynnik dyfuzji wody w glebie jest wyliczany jako wartość wyrażenia: $K(\theta) \partial h / \partial \theta$, h oznacza ciśnienie ssące.

Dla uruchomienia programu potrzebne są:

1. procedura obliczeniowa $\nu(\theta)$ dla procesu osuszania,
2. procedura obliczeniowa $\nu(\theta)$ dla procesu zwilżania,
3. procedura podająca wartości $\chi(\theta)$.

Wyniki potwierdzają wpływ histerezy na czas trwania procesu przepływu wody, przy czym różnica między procesami rzeczywistymi, to jest z histerezą, a procesami uproszczonymi (bez histerezy) jest tym większa, im dłużej trwa proces. Histereza odgrywa rolę czynnika hamującego przepływu wody w glebach, w których szerokość pętli histerezy jest znaczna. Szczególnie tam powinien być uwzględniany wpływ histerezy.

Dane i Wierenga [8] przedstawili próbę rozwiązania równania przepływu z uwzględnieniem histerezy dla gleb o uwarstwionym profilu. Jest to zagadnienie szczególnie trudne, ponieważ każda z warstw gleby ma inne charakterystyki wodne.

Na podstawie obliczeń z różnymi krzywymi opisującymi proces osuszania i proces zwilżania Staple [39] skonstruował program określający współczynnik dyfuzyjności w strefie frontu zwilżania. Danymi wymaganymi do obliczeń są wartości współczynnika przewodności wodnej dla procesu zwilżania i osuszania, wewnętrzne krzywe osuszania pętli histerezy i krzywe brzegowe.

Wyżej wspomniane przykłady opracowań, których autorzy starali się ująć zjawisko przepływu wody przez glebę w świetle termodynamicznej teorii procesów nieodwracalnych, odzwierciedlają postępowanie w zakresie przyjmowania jak najmniejszej ilości założeń upraszczających, a tym samym jak najwierniejszego opisu zjawiska fizycznego modelem matematycznym.

SYMULACJA PROCESU RUCHU WODY W GLEBACH

Omówione rozwiązania równania ruchu wody w glebie nie wyczerpują oczywiście zagadnienia. W zasadzie mamy do czynienia zawsze z tym samym procesem, jednak różnorodność warunków w jakich proces zachodzi - np. zjawisko przesączania się wody na skutek ukształtowania powierzchni gleby [25, 48], przesączanie powodowane istnieniem wewnątrz gleby obszarów nasyconych [7, 20], przepływ wywołany zmiennym skokowo ciśnieniem [28] itp. - zmusza do tworzenia coraz bardziej skomplikowanych modeli matematycznych adekwatnie opisujących przebieg procesu. Sformułowanie równania różniczkowego wraz z realistycznymi warunkami brzegowymi i początkowymi jest jedynie punktem wyjścia do dalszych badań, a gdy nie ma rozwiązania analitycznego zachodzi konieczność dyskretyzacji w czasie i przestrzeni oraz przejścia do równań różnicowych. Dalszym krokiem jest opracowanie schematu różnicowego i zaprogramowanie na maszynę cyfrową. W wymienionych tutaj pracach [7, 20, 25, 28, 48] taki tok postępowania doprowadzał do efektywnego rozwiązania wybranych zagadnień z możliwością praktycznych zastosowań.

Rozwój komputeryzacji, tj. możliwość dysponowania bardzo szybkimi maszynami liczącymi z dużą pamięcią operacyjną, pozwala na badanie przepływu wody metodami symulacji. Przykłady rozwiązań numerycznych równania przepływu wody w nienasyconym ośrodku porowatym wraz z programem symulacji podali między innymi: de Wit i Van Keulen [51], Wind i Van Doorne [50], Van der Ploeg [43], Feddes i współaut. [16].

Metoda pokazana przez de Wita i Van Keulena w [51] opiera się na założeniu, że natężenie przepływu wody między dwoma przyległymi przedziałami o jednakowej długości Δx i indeksach odpowiednio: "n" i "n-1", opisuje równość:

$$Q = D_n (\theta_{n-1} - \theta_n) / \Delta x,$$

gdzie:

Δx - odległość między środkami przedziałów;

D - współczynnik dyfuzyjności $[m^2 s^{-1}]$,

Q - przepływ $[m \cdot s^{-1}]$;

θ - wilgotność $[m^3 m^{-3}]$.

Problemem jest wybór metody obliczania D . Ustalenie algorytmu, który jest właściwy dla pewnych gleb, może powodować powstawanie znacznych błędów w przypadku innych gleb. Zwykle przyjmuje się, że D dla danej chwili jest średnią $(1/D_n + 1/D_{n+1})$ w poprzedniej chwili t lub też opiera obliczenia o zależność szybkości ruchu frontu zwilżania, tj. korzysta się ze wzoru:

$$D = (\theta_n D_n + \theta_{n-1} D_{n-1}) / (\theta_n + \theta_{n-1}),$$

z wartościami θ_n , θ_{n-1} , D_n , D_{n-1} branymi z poprzedniej chwili czasu. Zaproponowana przez de Wita metoda nie wymaga założenia o kształcie krzywej dyfuzyjności względem θ . Dopiero w trakcie obliczeń zostaje podjęta decyzja, która średnia jest najlepszym przybliżeniem. Transformacja Boltzmanna:

$$L = x \cdot t^{-1/2}$$

przeprowadza równanie (4) (bez członu grawitacyjnego) do postaci:

$$\frac{d^2\theta}{dL^2} = -\frac{1}{D} \left(\frac{d\theta}{dL} \frac{dD}{d\theta} + \frac{L}{2} \right) \frac{d\theta}{dL}. \quad (39)$$

Przyjęto, że horyzontalna półnieskończona kolumna jednorodnej gleby o stałej wilgotności początkowej θ_{init} (na całej długości) ma na jednym końcu wytworzony stan nasycenia, czyli wilgotność θ_{sat} . Oczywiście wilgotność początkowa dla $L = 0$ jest równa θ_{sat} , lecz wartość $d\theta/dL$ zależy od θ_{init} w sposób określony przez postać funkcji $D(\theta)$. Po zastąpieniu w równaniu (39) pochodnych względem L i θ ilorazami różnicowymi, proces obliczeniowy sprowadza się do wyszukiwania w tablicach wartości D względem θ oraz $dD/d\theta$ względem θ . Pochodną $d\theta/dL$ otrzymuje się jako funkcję górnej granicy całkowania $d^2\theta/dL^2$, a wilgotność z całkowania $d\theta/dL$. Ponieważ początkowe wartości $d\theta/dL_{init}$ są w nieznany sposób powiązane z początkową wilgotnością θ_{init} kolumny, symulacja przepływu musi być przeprowadzona dla szeregu tych wartości.

Po niewielkich modyfikacjach program można dostosować do symulacji procesu infiltracji pionowej.

Równaniem ruchu wody w kierunku pionowym ku dołowi, czyli (2), jest:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = \frac{\partial K}{\partial x}.$$

Rozwiązanie tego równania metodą symulacji przedstawił Van der Ploeg /43/. Cały profil gleby został podzielony na warstwy o grubości 1 cm i przekroju 1 cm². Rozpatrywano trzy kolejne warstwy o położeniu c_u , c_m , c_l i środkach geometrycznych w punktach x_u , x_m , x_l . Uwilgotnienie każdej z warstw wynosiło odpowiednio θ_u , θ_m , θ_l . Ilość wody przepływającej w jednostce czasu przez jednostkę pola z punktu x_u do punktu x_m zgodnie z prawem Darcy'ego wynosi:

$$q_{u,m} = -K(\theta) (h_m - h_u) / (x_m - x_u)$$

gdzie $h = \phi - x$.

Ponieważ w strefie nienasyconej współczynnik przewodności wodnej K jest funkcją wilgotności θ , więc:

$$q_{u,m} = - \left[K(\theta_u) + K(\theta_m) \right] (h_m - h_u) / \left[2(x_m - x_u) \right].$$

W analogiczny sposób obliczany jest przepływ $q_{m,l}$. Różnica $(\Delta q)_m$ między ilością wody wpływającej i wypływającej w przypadku warstwy c_m przedstawia zmianę uwilgotnienia $(\Delta \theta)_m$ w jednostce czasu. Wynika stąd równość:

$$(\Delta \theta)_m = (\Delta q)_m = q_{u,m} - q_{m,l}.$$

Po upływie czasu t , wilgotność jest równa:

$$(\theta_m)_t = (\theta_m)_{t=0} + \int_0^t (\Delta \theta)_m dt.$$

Do przeprowadzenia obliczeń należy dysponować dwoma zbiorami danych eksperymentalnych - jednym opisującym relację między θ i ϕ , oraz drugim dla związku między θ a K . W wyniku otrzymuje się wilgotność θ w funkcji czasu i głębokości.

PODSUMOWANIE

Na podstawie przeprowadzonej analizy rozwiązań można stwierdzić, że metodami numerycznymi uzyskuje się dobre jakościowo wyniki, a nawet w niektórych przypadkach wiarygodne wyniki ilościowe. Niedokładności zaobserwowane w pewnych przypadkach są powodowane przez:

1. niedokładności założeń stosowanych w teorii przepływu w ośrodku nienasyconym;
2. brak precyzji w oszacowaniu używanych w obliczeniach charakterystyk układu woda-gleba;
3. błędy pomiarów;
4. niezgodność używanych w obliczeniach warunków brzegowych i początkowych z rzeczywistymi warunkami fizycznymi;
5. niedokładność przybliżeń stosowanych w celu uwzględnienia zjawiska histerezy.

Badania nad metodami numerycznymi rozwiązania równania przepływu wody w glebie, równania typu (1), są nadal prowadzone. Najczęściej wydziela się zagadnienie ruchu wody i rozpatruje się je odrębnie, bez powiązania ze zjawiskami cieplnymi czy biologicznymi (próby takich rozwiązań są przedstawione w pracach [27, 35]). Pomimo przyjmowanych uproszczeń, aktualnie wymaga rozstrzygnięcia kilka problemów:

1. wybór zmiennej zależnej (wilgotność czy potencjał wody glebowej),
2. sposób uwzględniania efektów histerezy dla funkcji przewodności hydraulicznej gleby,
3. postać ewentualnej transformacji stosowanej w celu przejścia od równania cząstowego do zwykłego równania różniczkowego (transformacja Boltzmanna, zakres jej stosowalności [24], transformacja Kirchhoffa [19]) lub inna metoda linearyzacji (np. iteracyjne rozwiązywanie układów nieliniowych równań algebraicznych),
4. rola i postać warunków granicznych,
5. wpływ przyjmowanych uproszczeń dotyczących postaci zależności między takimi parametrami jak np. D i θ , K i θ itp.
6. rozszerzenie rozwiązań na przypadki dwu- i trójwymiarowe.

PIŚMIENNICTWO

1. Ashcroft G., Marsh D.D., Evans D.D., Boersma L.: Numerical method for solving the diffusion equation. I. Horizontal flow in semi-infinite media, *Soil Sci. Soc. Am. Proc.*, 1962, vol. 26, 522-525.
2. Boersma L.: *Soil water*, Am. Soc. of Agronomy, Madison, 1972.
3. Brandt A., Bresler E., Diner N., Ben-Asher J., Haller J., Goldberg D.: Infiltration from a trickle source. I. Mathematical models, *Soil Sci. Soc. Am. Proc.*, 1971, vol. 35, 675-682.
4. Brandt A., Bresler E., Diner N., Ben-Asher J., Haller J., Goldberg D.: Infiltration from a trickle source: II. Experimental data and predictions, *Soil Sci. Soc. Am. Proc.*, 1971, vol. 35, 683-689.
5. Bresler E., Kemper W.D.: Soil water evaporation as affected by wetting methods and crust formation, *Soil Sci. Soc. Am. Proc.*, 1970, vol. 34, 3-8.
6. Bruch J.C. Jr., Zyvolksi G.: Solution of equation for vertical unsaturated flow of soil water, *Soil Sci.*, 1973, t. 116, nr 6, 417-422.
7. Burajew L.N., Burajewa Z.M.: Some numerical methods for solving problems of nonsteady seepage in non-homogenous anisotropic soils. *Water in the unsaturated zone*, IAHS/AIHS, UNESCO, 1969, 500-502.
8. Dane J.H., Wierenga P.: Effect of hysteresis on the prediction of infiltration, redistribution and drainage of water in layered soil, *J. Hydrol.*, 1975, vol. 25, 229-242.
9. Dagan G.: Linearized solution of unsteady deep flow toward an array of horizontal drains, *J. Geophys. Res.*, 1964, vol. 59, 3361-3369.
10. Day P.R., Luthin J.N.: A numerical solution of the differential equation of flow for a vertical drainage problem, *Soil Sci. Soc. Am. Proc.*, 1959, vol. 20, 443-447.
11. Everett D.H., Whitton W.J.: A general approach to hysteresis: 1, *Trans. Faraday Soc.*, 1952, vol. 48, 749-761.
12. Everett D.H., Smith F.W.: A general approach to hysteresis: 2, *Trans. Faraday Soc.*, 1954, vol. 50, 187-195.

13. Everett D.H.: A general approach to hysteresis: 3, Trans. Faraday Soc., 1954, vol. 50, 1077-1090.
14. Everett D.H.: A general approach to hysteresis: 4, Trans. Faraday Soc., 1955, vol. 51, 1551-1568.
15. Feddes R.A., Kowalik P., Neuman S.P., Bresler E.: Finite difference and finite element simulation of field water uptake by plants, ICW. Techn. Bulletin, 1976, nr 94.
16. Feddes R.A., Kowalik P., Zaradny H.: Simulation of field water use and crop yield, Pudoc, Wageningen, 1978.
17. Giesel W., Renger M., Strebel O.: Numerical treatment of the unsaturated water flow equation - comparison of experimental and computed results, Water Resour. Res., 1972, vol. 9, 174-177.
18. Hanks R.J., Bowers S.A.: Numerical solution of the moisture flow equation for infiltration into layered soils, Soil Sci. Soc. Am. Proc., 1962, vol. 26, 530-534.
19. Haverkamp R., Vauclin M., Touma J., Wierenga P.J., Vachaud G.: A comparison of numerical simulation models for one-dimensional infiltration, Soil Sci. Soc. Am. Proc., 1977, vol. 41, 285-294.
20. Jeppson R.W., Nelsen R.W.: Inverse formulation and finite difference solution to partially saturated seepage from canals, Soil Sci. Soc. Am. Proc., 1960, vol. 34, 9-14.
21. Kastanek F.: Numerical simulation technique for vertical drainage from a soil column, ICW. Techn. Bulletin, 1971, nr 77.
22. Klute A.: A numerical method for solving the flow equation for water in unsaturated materials, Soil Sci., 1952, nr 73, 105-116.
23. Klute A., Whisler F.D., Scott E.J.: Numerical solution of the nonlinear diffusion equation for water in a horizontal soil column of finite length, Soil Sci. Soc. Am. Proc., 1965, vol. 29, 353-358.
24. Kobayashi H.: A theoretical analysis and numerical solutions of unsaturated flow in soil. Water in the unsaturated zone, IASH/AIHS, UNESCO, 1969, 429-439.
25. Morin G.C.A., Warrick A.W.: Steady-state seepage in a hillside, Soil Sci. Soc. Am. Proc., 1973, vol. 37, 346-351.

26. Nierpin S.W., Reznik G.S., Józefowicz G.I.: Ob ucziotie gistere-zisa pri razcziotie pieriraspredielenija poczwiennoj włagi, Matem. Met. po Agrofizykie i Biologii, Gidromietizdat, Leningrad, 1969, 4-17.
27. Nimah N.M., Hanks R.J.: Model for estimating soil water, plant and atmospheric interrelations: I. Description and sensivity, Soil Sci. Soc. Am. Proc., 1973, vol. 37, 522-527.
28. Ohmstede W.D.: Numerical solution of transient flow of water in unsaturated soil with application to uotflow from soil moisture extra-ctors, J. Geophys. Res., 1964, vol. 64, 633-642.
29. Philip J.R.: The theory of infiltration: I. The infiltration equation and its solution, Soil Sci., 1957, t. 83, 345-358.
30. Philip J.R.: The theory of infiltration. II. The profile of infinity, Soil Sci., 1957, t. 83, 435-448.
31. Philip J.R.: Absorption and infiltration in two- and threedimensional systems. Water in the unsaturated zone, IAHS/AIHS, UNESCO, 1969, 503-516.
32. Poulouvassilis A.: Hysteresis of pore water and application of the concept of independent domains, Soil Sci., 1962, t. 93, 405-413.
33. Reichardt K., Nielsen D.R., Biggar J.W.: Horizontal infiltration into layered soils, Soil Sci. Soc. Am. Proc., 1972, vol. 36, 858-863.
34. Richards L.A.: Capillary conduction of liquids through porous me-diums, Physics, nr 1, 318-333.
35. Rosema A.: A mathematical model for simulation of the thermal be-haviour of bare soils, based on heat and moisture transfer, NIWARS, 1976, nr 1.
36. Rubin J.: Numerical method for analyzing hysteresis-affected post infiltration redistribution of soil moisture, Soil Sci. Soc. Am. Proc., 1967, vol. 31, 13-20.
37. Rubin J.: Numerical analysis of ponded rainfall infiltration. Water in the unsaturated zone, IASH/AIHS, UNESCO, 1969, 440-450.
38. Rubin J.: Theoretical analysis of two-dimensional transient flow of water in unsaturated and partly unsaturated soils, Soil Sci. Soc.

- Am. Proc., 1968, vol. 32, 607-615.
39. Staple W.J.: Comparison of computed and measured redistribution following infiltration, Soil Sci. Soc. Am. Proc., 1969, vol. 33, 840-847.
 40. Staple W.J.: Infiltration and redistribution of water in vertical columns of loam, Soil Sci. Soc. Am. Proc., 1966, vol. 33, 645-651.
 41. Styczek A., Pyzik J.: Numeryczne rozwiązanie równania przepływu wody w gruntach i glebach nienasyconych, Arch. Hydrotechn., 1972, t. 19, 477-482.
 42. Swartzendruber D.: The applicability of Darcy's law, Soil Sci. Soc. Am. Proc., 1968, vol. 32, 11-15.
 43. Van der Ploeg R.R.: Simulation of moisture transfer in soils. One dimensional infiltration, Soil Sci., 1970, vol. 118, nr 6, 349-357.
 44. Van Keulen H., Hillel D.: A simulation study of the dryingfront phenomenon, Soil Sci., 1974, vol. 118, nr 4, 270-273.
 45. Vauclin M., Haverkamp R., Vachaud G.: Etude de la resolution numerique de l'equation de l'infiltration d'eau en milieu non saturé, IMG, Grenoble, 1978.
 46. Wang F. Chu., Hassan N.A., Franzini J.B.: A method for analyzing unsteady unsaturated flow in soils, J. Geophys. Res., 1964, vol. 69, 2568-2577.
 47. Wang F. Chu., Lakshminarayana V.: Mathematical solution of water movement through unsaturated non-homogenous soils, Soil Sci. Soc. Am. Proc., 1968, vol. 32, 329-334.
 48. Warrick A.W.: A mathematical solution to a hillside seepage problem, Soil Sci. Soc. Am. Proc., 1970, vol. 34, 849-851.
 49. Watson K.K.: Experimental and numerical study of column drainage, J. Hydraulic Div. Proc. Am. Soc. Civil Eng., 1967, HY2, vol. 93, 1-11.
 50. Wind G.P., Van Doorne W.: A numerical model for the simulation of unsaturated vertical flow of moisture in soils, ICW, Techn. Bulletin, 1975, nr 93.
 51. Wit C.T. de, Van Keulen H.: Simulation of transport processes in

soils, Pudoc, Wageningen, 1972.

52. Whisler F.D., Klute A.: Analysis of infiltration into stratified soil columns. Water in the unsaturated zone, IAHS/AIHS, UNESCO, 1969, 451-470.
53. Whisler F.D., Klute A.: The numerical analysis of infiltration considering hysteresis into a vertical soil column at equilibrium under gravity, Soil Sci. Soc. Am. Proc., 1965, vol. 29, 489-494.
54. Whisler F.D., Watson K.K., Perren S.J.: The numerical analysis of infiltration into heterogeneous porous media, Soil Sci. Soc. Am. Proc., 1972, vol. 36, 868-874.
55. Whisler F.D., Klute A., Peters D.B.: Soil water diffusivity from horizontal infiltration, Soil Sci. Soc. Am. Proc., 1968, vol. 32, 6-11.
56. Whisler F.D., Watson K.K.: One-dimensional gravity drainage of uniform columns of porous materials, J. Hydrol., 1968, 277-284.
57. Youngs E.G.: Redistribution of moisture in porous materials after infiltration: I, Soil Sci., 1958, vol. 86, 117-125.
58. Youngs E.G.: Redistribution of moisture in porous materials after infiltration: II, Soil Sci., 1958, vol. 86, 202-207.
59. Zaradny H.: Modelowanie przepływu wody w strefie niepełnego nasycenia, Rozprawy Hydrotechn., 1977, z. 37, 83-131.

SPIS TREŚCI

	str.
Wstęp	5
Równanie przepływu wody w glebie i jego ogólne rozwią- nie numeryczne	7
Numeryczne całkowanie równania przepływu dla procesu in- filtracji oraz rozmieszczenia wilgotności po procesie in- filtracji	11
Zagadnienie odwadniania gleby i jej wysychania	34
Problem histerezy	41
Symulacja procesu ruchu wody w glebach	53
Podsumowanie	56
Piśmiennictwo	57