

problemy agrofizyki

POLSKA AKADEMIA NAUK · ZAKŁAD AGROFIZYKI



Ossolineum

zeszyt 33

rok 1980

P O L S K A A K A D E M I A N A U K
ZAKŁAD AGROFIZYKI W LUBLINIE

PROBLEMY AGROFIZYKI 33

BOGUSŁAW SZOT, JÓZEF HORABIK

ZAGADNIENIA MECHANIKI OŚRODKÓW SYPKICH POCHODZENIA ROŚLINNEGO

WROCŁAW · WARSZAWA · KRAKÓW · GDAŃSK
ZAKŁAD NARODOWY IMIENIA OSSOLIŃSKICH
WYDAWNICTWO POLSKIEJ AKADEMII NAUK

1980

Komitet redakcyjny
prof. dr JAN GLIŃSKI (redaktor naczelny)
prof. dr IGNACY DECHNIK, doc. dr BOGUSŁAW SZOT

Okladkę projektował Zygmunt Ziemka

Redaktor Wydawnictwa Lidia Kwiecień
Redaktor techniczny Bożena Pojasek

© Copyright by Zakład Narodowy im. Ossolińskich — Wydawnictwo. Wrocław 1980
Printed in Poland

PL ISSN 0137-6586
ISBN 83-04-00631-6

Zakład Narodowy im. Ossolińskich — Wydawnictwo. Wrocław 1980.
Nakład: 330 egz. Objętość: ark. wyd. 3,40, ark. druk. 4. Papier
offsetowy kl. V 70 g, 61 × 86. Oddano do druku 30 VI 1980. Druk
ukończono w sierpniu 1980. Wrocławska Drukarnia Naukowa.
Zam. 3120/80 — B-7. Cena zł 15.—

WSTĘP

Nowoczesne rolnictwo wymaga coraz szerszej znajomości wielu czynników kształtujących zarówno wysokość plonów roślin uprawnych, jak i procesy związane ze zmechanizowanym zbiorem, transportem, oczyszczaniem, przechowywaniem i przetwórstwem. Zaistniałe zmiany w rolnictwie wiążą się przede wszystkim ze zdecydowaną ingerencją techniki, gdyż może ona zapewnić maksymalne wykorzystanie rolniczej przestrzeni produkcyjnej zmniejszającej się stale na rzecz przemysłu i budownictwa. Jednakże szybki rozwój techniki rolniczej spowodował istotny wpływ maszyn na wzrost i rozwój roślin, na jakość uzyskiwanych plonów i surowców roślinnych oraz na procesy technologiczne, będące składową częścią obecnej produkcji rolnej. Ocena wpływu mechanizacji na organizm roślinny jest jednak możliwa tylko wtedy, kiedy zostaną poznane wszystkie właściwości roślin i plodów rolnych, wyrażające ich procesy biologiczne i stan fizyczny w różnych warunkach środowiska i pod wpływem różnorodnej działalności człowieka. Zakres dotychczasowych badań i znajomość cech materiałów roślinnych są jeszcze niedostateczne zarówno z punktu widzenia potrzeb konstruktorów maszyn i urządzeń rolniczych, jak też mechanizatorów produkcji. Dotyczy to głównie właściwości fizycznych opisujących stan roślin, plodów rolnych i surowców roślinnych w bardzo szerokim ujęciu ich zmienności podczas wszelkich procesów technologicznych, związanych z całym cyklem produkcyjnym do przetwórstwa włącznie.

Pośród wielu cech materiałów roślinnych, właściwości mechaniczne uważa się za najbardziej istotne, ponieważ wpływają na straty ilościowe oraz decydują o jakości surowców i przetworów, a także materiału siewnego. Ograniczenie tych strat stwarza szanse odzyskania zagubionych nie-

jako rezerw, mających niemałe znaczenie gospodarcze.

Oprócz problemów, które występują w czasie zbioru plonów, niemałe znaczenie należy przypisać zagadnieniom przechowalnictwa i wszelkim operacjom towarzyszącym temu procesowi. Znajomość bowiem praw fizycznych, rządzących ruchem dużych ilości ziarna zbóż, paszy czy kiszonki, jest równie ważna przy określaniu ciśnienia na ściany zbiorników, wzajemnego oddziaływania cząstek na siebie, jak i przy poszukiwaniach optymalnych warunków opróżniania zbiorników. Zagęszczanie się materiałów roślinnych w czasie przechowywania czy świadome prasowanie podczas brykietowania pociąga za sobą konieczność poznania charakterystyk procesów rozprężania, tarcia wewnętrznego, a także ściśliwości, spoistości, sprężystości, plastyczności itp. Istotnym utrudnieniem w procesie poznawania tych praw jest złożony pod względem fizycznym i trudny do opisania charakter poszczególnych materiałów roślinnych, wynikający z nieciągłej budowy komórkowej i wielofazowej struktury, której każdy składnik inaczej reaguje na wpływ czynników zewnętrznych. Trudności te pogłębia jeszcze fakt ciągłej zmienności cech fizycznych produktów roślinnych w czasie (3).

Brak metod opisu tak złożonych ośrodków spowodował przyjęcie wielu założeń i sposobów badań stosowanych dotychczas w mechanice ośrodków ciągłych. Są to jednakże bardzo uproszczone rozwiązania, a w niektórych przypadkach w ogóle niemożliwe do przyjęcia. Częstokroć w badaniach płodów rolnych w masie (np. duże ilości ziarna zbóż w silosach) stosuje się te same metody eksperymentalne i sposoby matematycznego opisu, jak do oceny technicznych ośrodków sypkich (np. piasek, żwir), poszukując pewnych analogicznych cech. Stąd też wydaje się słuszne przedstawienie różnych poglądów na ten temat z uwzględnieniem zarówno teorii klasycznych, jak i prób rozwiązań najbardziej bliskich rzeczywistości.

ZAGADNIENIA SKŁADOWANIA I TRANSPORTU OŚRODKÓW SYPKICH POCHODZENIA ROŚLINNEGO

Współczesne metody przechowywania ziarna zbóż oraz rozdrobnionych produktów rolniczych w silosach są oparte w dużej mierze na znajomości właściwości fizycznych zgromadzonego materiału, jednakże mogą wystąpić

nie przewidziane komplikacje w przypadku nieuwzględnienia któregoś z wielu istotnych czynników. Trudności potęguje fakt, że w przechowywanym materiale biologicznym zachodzą stale różne przemiany fizyczne, fizykochemiczne i biologiczne. Wiele problemów stwarza już sam proces napełniania zbiorników, gdyż nieodłącznie towarzyszy mu zjawisko samorzutnego sortowania się ziarna. Spadające z dużej wysokości nasiona sortują się na skutek różnego oporu powietrza stawianego cząstkom o różnej wielkości i kształcie. W wyniku tego cząstki najcięższe, a więc dorodne ziarna i ciężkie zanieczyszczenia, spadają najszybciej i gromadzą się w środku silosu. Ziarna i zanieczyszczenia lżejsze natrafiając na opór powietrza opadają wolniej i staczają się na boki po powierzchni stożka utworzonego z nasion ciężkich. Zanieczyszczenia najlżejsze, o dużym stosunku powierzchni do objętości, spadają najwolniej i zostają zepchnięte do ścian komory. W wyniku tego zawartość silosu staje się niejednolita, tworzą się strefy o podwyższonej ilości zanieczyszczenia, które z reguły mają wyższą wilgotność. Zjawisko to jest niepożądane również z tego powodu, że w miejscach nagromadzenia się zanieczyszczeń i pyłu łatwo powstają ogniska samozagrzewania się materiału, powodujące zmniejszenie sypaności i prowadzące w efekcie do zlegania i sfermentowania. W tych miejscach powstają również dogodne warunki do rozwoju szkodników zbożowych. Szczególnie sprzyja temu napełnianie silosów ziarnem bezpośrednio z kombajnów lub bez wstępnego czyszczenia i w stanie podwyższonej wilgotności (15, 31, 49, 57, 59). Ujemnym skutkiem samosortowania się ziarna podczas napełniania silosów zapobiega instalowanie przy wlocie komory specjalnych urządzeń w postaci stałych lub obracających się stożków, które rozrzucają ziarno równomiernie (49).

Stephens i Foster (52) stwierdzili, że jeśli do napełniania komory użyje się mechanicznego rozrzucaacza, to gęstość usypna ziaren kukurydzy będzie o 20% wyższa, a opór, jaki stawia usypane ziarno wymuszonemu przepływowi powietrza, będzie o 300% wyższy niż w przypadku tradycyjnej metody napełniania. Stwierdzono również identyczny charakter zachowania się ośrodka podczas badań ziarna pszenicy i nasion sorgo (53). Autorzy ci stwierdzają, że użycie rozrzucaacza może zwiększyć pojemność komory poprzez zagęszczenie ośrodka, ale z drugiej strony zwracają uwa-

gę na konieczność skorelowania zagęszczania z systemem przewietrzania. Lai i Fan (28), prowadząc badania modelowe ośrodka składającego się z dużych i małych kul, rozważali dwa przypadki: pierwszy - gdy małe kule wypełniają szczelnie przestrzenie między dużymi kulami (co występuje w przypadku użycia rozrzucacza), oraz drugi - gdy małe i duże kule z jednakowym prawdopodobieństwem zajmują miejsce na powierzchni poprzedniej warstwy tworząc bardzo luźną strukturę (co odpowiada przypadkowi, kiedy nie ma różnicy między oporem powietrza stawianym spadającym dużym i małym ziarnom). W ten sposób potwierdzono przypuszczenia Fostera, że spadek ciśnienia przepływającego powietrza w zgromadzonej masie ziarna jest spowodowany wypełnianiem wolnych przestrzeni pomiędzy nimi przez drobne zanieczyszczenia, bowiem po zastosowaniu mechanicznego rozrzucania drobne cząstki opadają równomiernie wypełniając wolne przestrzenie w uformowanej warstwie dorodnych ziaren. Dzięki temu tworzy się struktura bardzo gęstego upakowania.

Porowatość struktury usypanego w komorze ziarna jest ważnym czynnikiem, decydującym o możliwości nasycańa zboża powietrzem, co z kolei wpływa na właściwości ziarna oraz przebieg procesów fizycznych i chemicznych. W zależności od wielkości przestrzeni międzyziarnowych i migracji powietrza kształtuje się temperatura ośrodka oraz wymiana ciepła i masy (31). Istnienie przestrzeni międzyziarnowych pozwala również na przewietrzanie czy dosuszanie masy ziarna oraz odkażanie nasion różnymi gazami. Należy także zwrócić uwagę, że w miarę upływu czasu składowania zgromadzone ziarno zagęszcza się pod wpływem własnego ciężaru, a proces ten wzmacnia podwyższona wilgotność ośrodka (54).

W projektowaniu dużych magazynów rezerw nasiennych poza elementami mikroklimatu uwzględnia się również zróżnicowanie poszczególnych gatunków nasion, gdyż zmienność ich cech fizycznych ma istotny wpływ na dobór procesów technologicznych (przygotowujących masę nasenną do dłuższego okresu składowania), jak również na kształtowanie warunków przechowywania i konserwacji (31, 57).

Inny problem stanowi rozkład ciśnienia w zgromadzonym w zbiorniku materiale. Pomijanie tarcia wewnętrznego ośrodka sypkiego oraz tarcia zewnętrznego (o ściany silosu) prowadzi do mylnej oceny stanu napręż-

nia i przyjęcia wniosku, że całkowity ciężar ośrodka jest przenoszony wprost na podłogę zbiornika. Z powodu niedostatecznej znajomości fizycznych właściwości zmagazynowanego materiału oszacowanie rozkładu poziomych i pionowych naprężeń wewnątrz ośrodka oraz nacisku na podłogę w warunkach statycznych i dynamicznych jest nadal trudnym problemem dla inżynierów zajmujących się projektowaniem tych urządzeń.

Mohsenin (35) przytacza kilka definicji płytkich i głębokich zbiorników. Za płytki uważa się taki, w którym wysokość warstwy ziarna jest mniejsza lub równa równoważnej średnicy zbiornika. Średnica równoważna jest równa czterokrotnemu promieniowi hydraulicznemu, tj. stosunkowi pola przekroju poprzecznego zbiornika do obwodu tego przekroju. Inne kryterium głębokości zbiornika polega na nakreśleniu linii pod kątem równym kątowni naturalnej sytkości zgromadzonego materiału od punktu przecięcia ściany zbiornika i podłogi do przeciwległej ściany. W przypadku głębokich zbiorników linia ta przecina przeciwległą ścianę poniżej górnej powierzchni materiału.

Isaacson i Boyd (23) podali następującą definicję głębokiego zbiornika:

$$\frac{H_d}{D} \geq 0,75 \frac{1}{f_{sk}}, \quad (1)$$

gdzie:

H_d - wysokość warstwy ziarna;

D - średnica zbiornika;

f_s - współczynnik statycznego tarcia (o ściany zbiornika) zgromadzonego materiału;

k - stosunek naprężenia poziomego σ_3 do naprężenia pionowego w materiale, $k = \frac{\sigma_3}{\sigma_1}$.

Do oszacowania poziomego naprężenia działającego na ściany niskiego zbiornika powszechnie stosuje się równanie Rankine'a (35):

$$\sigma_3 = w \cdot y \cdot \tan^2(45^\circ - \phi_i/2), \quad (2)$$

gdzie:

σ_3 - poziome naprężenie działające na ścianę zbiornika w punkcie.

znajdującym się o y poniżej górnej powierzchni materiału;

w - ciężar objętościowy zgromadzonego ziarna;

ϕ_i - kąt tarcia wewnętrzznego.

Dla tego typu zbiorników diagram naprężenia jest trójkątem z wypadkową siłą F działającą w punkcie położonym na $\frac{1}{3}$ całkowitej wysokości zgromadzonego materiału.

O wiele bardziej złożony stan naprężenia występuje w przypadku głębokich zbiorników. Gdy wysokość materiału przekracza w nich pewne granice, można zaobserwować brak wzrostu ciśnienia w dolnych warstwach w miarę dalszego zapełniania zbiornika. Stąd wniosek, że ściany muszą przenosić dodatkowy ciężar. Klasyczna teoria naprężeń w ośrodku sypkim rozwinięta przez Janssena (cyt. wg (32)) daje następujące wyrażenie na naprężenie poziome w wysokim zbiorniku:

$$\sigma_3 = \frac{w R}{f_s} \left[1 - \exp \left(- \frac{k f_s h}{R} \right) \right], \quad (3)$$

gdzie:

R - promień hydrauliczny zbiornika;

h - głębokość warstwy materiału;

pozostałe symbole jak we wzorach (1) i (2).

W równaniu tym Janssen założył, że ciężar właściwy w oraz współczynnik k są stałe. Stosunek naprężeń k jest otrzymywany albo wprost przez pomiar ciśnienia w rzeczywistym lub modelowym zbiorniku, albo przez badanie próbek materiału, np. w aparacie trójosiowego ściskania. Wtedy współczynnik k może być wyrażony poprzez kąt tarcia wewnętrznego ϕ_i , jeżeli przyjmiemy uproszczoną graficzną reprezentację stanu naprężenia w dowolnym punkcie ośrodka za pomocą kół Mohra:

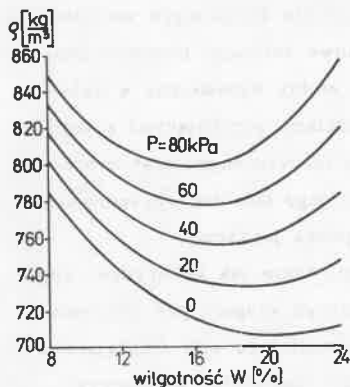
$$k = \frac{\sigma_3}{\sigma_1} = \frac{1 - \sin \phi_i}{1 + \sin \phi_i}. \quad (4)$$

Wielu autorów (5,23,32) stwierdziło, że współczynnik k nie jest stały, lecz zmienia się wraz z typem materiału, geometrią zbiornika, wysokością warstwy i wilgotnością ośrodka. Próbowano też zakwestionować ogólność równania Janssena, szczególnie w przypadkach obejmujących dy-

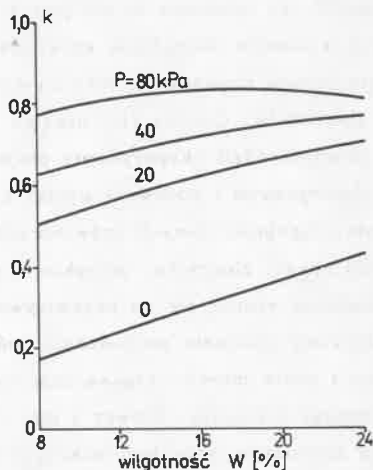
namiczne obciążenia występujące podczas ładowania i wyładowania (23,35). Twierdzono, że równanie to nie jest w stanie przewidzieć pewnych krytycznych wzrostów naprężenia spowodowanych takim typem obciążenia. Przyjęto jednak równanie to jako wystarczające dla statycznych warunków pracy zbiorników. Collins (6) uznając wyjściowe definicje równania Janssena przeprowadził eksperymenty obejmujące efekty dynamiczne w układzie cylindrycznym i porównał wyniki z wartościami wynikającymi z tego równania. Zgodność danych doświadczalnych z teoretycznymi jest dobra w górnej części zbiornika, jednakże w pobliżu jego dna dane eksperymentalne poważnie różnią się od przewidywanych przez Janssena.

Materiały ziarniste pochodzenia roślinnego, takie jak kukurydza, soja, pszenica i wiele innych, zagęszczają się w różnym stopniu pod wpływem zewnętrznego ciśnienia. Clower i inni (5) wykazali, że siła działająca w ośrodku ziarnistym może być funkcją ściśliwości materiału. Rozszerzyli oni zakres stosowalności równania Janssena uwzględniając zmiany gęstości zgromadzonego ośrodka oraz zmiany współczynnika k . Na podstawie przeprowadzonych badań eksperymentalnych stwierdzili, że gęstość objętościowa oraz współczynnik k mogą być przedstawione jako liniowe funkcje naprężenia pionowego. Podobnie Loewer i inni (32) określili wpływ różnych poziomów pionowego naprężenia, wilgotności i wymiaru cząstek na gęstość objętościową i współczynnik k dla ośrodka złożonego z ziaren kukurydzy. Nie stwierdzono natomiast istotnego wpływu rozdrobnienia na gęstość objętościową. Na podstawie analizy statystycznej autorzy ci podali równania najlepiej opisujące związek między gęstością objętościową, naprężeniem i wilgotnością oraz między współczynnikiem k , naprężeniem i wilgotnością. Graficzną ilustrację zaproponowanych równań przedstawiono na rysunku 1 i 2.

Ponieważ problem rozkładu naprężenia w zgromadzonej masie ziarna jest wciąż nie rozwiązany, więc równanie Janssena daje nadal proste przybliżenie rzeczywistego stanu naprężenia i bywa praktycznie stosowane do oszacowania parcia ośrodka na ściany wysokiego zbiornika. Głównym problemem według Mohsenina (35) jest potrzeba uzyskania wiarygodnych i w miarę obszernych danych o fizycznych właściwościach przechowywanych ziaren. Dostępne dane są niekompletne, a często nawet sprzeczne (3,4,



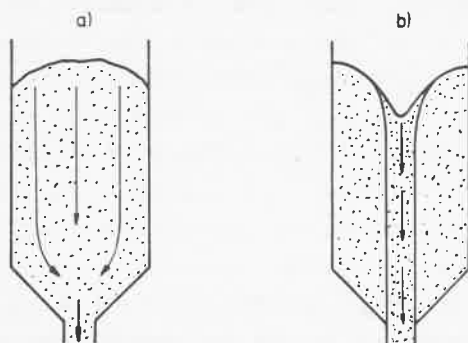
Rys. 1. Gęstość objętościowa warstwy ziarna kukurydzy jako funkcja wilgotności W i różnych wartości ciśnienia P (32)



Rys. 2. Współczynnik k dla warstwy ziarna kukurydzy jako funkcja wilgotności W i różnych wartości ciśnienia P (32)

16). W związku z tym Mohsenin przytacza następującą prostą procedurę stosowaną aktualnie do oszacowania statycznych obciążeń w głębokich zbiornikach. Rozważamy trzy typy naprężeń: poziome i pionowe - działające na ściany zbiornika, oraz pionowe - działające na podłogę. Do oszacowania naprężenia poziomego wykorzystuje się równanie Janssena wraz z kompletem odpowiednich stałych. Pionowe naprężenie styczne działające na ścianę zbiornika (będące wynikiem poziomego ciśnienia oraz istnienia tarcia między gromadzonym materiałem a ścianą) szacuje się na podstawie wyznaczonych wcześniej wartości współczynnika tarcia. Ciśnienie działające na podłogę może być oszacowane na podstawie poziomego naprężenia i wyznaczonej eksperymentalnie wartości współczynnika k.

Omówione zagadnienia wiążą się ściśle nie tylko z procesami zachodzącymi podczas przechowywania biologicznych materiałów sypkich w dużych zbiornikach, lecz także z opróżnianiem tych komór. Zasadniczo obserwuje się dwie formy grawitacyjnego opróżniania zbiorników. Pierwsza to obsuwanie się ziaren w całym przekroju i druga - obsuwanie się ziaren wąskim kanałem z wytworzeniem leja na powierzchni warstwy (rys.3).



Rys. 3. Dwie formy grawitacyjnego opróżniania zbiorników: a) słupem na całym przekroju zbiornika, b) wąskim kanałem uformowanym wewnątrz ośrodka

Taka lub inna forma opróżniania silosu zależy między innymi od ułożenia jego zawartości. Nasypywanie ziarna do komory strumieniem zwartym stwarza porowatą strukturę, co sprzyja występowaniu pierwszej formy opróżniania. Natomiast napełnianie strumieniem rozproszonym stwarza strukturę bardziej zwartą, sprzyjającą drugiej formie opróżniania. Istotną rolę odgrywa również stosunek średnicy silosu D do jego wysokości H . Dla $\frac{H}{D} > 3$ następuje opróżnianie słupem na całym przekroju silosu, zaś dla $\frac{H}{D} < 3$ wąskim kanałem (51,57). Ważny jest przy tym związek między kątem kinetycznego tarcia ϕ_w zmagazynowanego materiału o ściany stożkowego wylotu zbiornika a kątem rozwarcia tego stożka. Jeśli stożek jest wystarczająco stromy oraz kąt tarcia ϕ_w mały, to kanał przemieszczającego się ośrodka rozszerza się od wylotu ku górze wzdłuż ścian zbiornika i cały materiał jest w ruchu. Kiedy zaś ziarno płynie ku wylotowi wąskim kanałem uformowanym wewnątrz ośrodka, wtedy otaczający ten kanał materiał jest w spoczynku, czyli powstają tzw. martwe strefy, gdzie może nastąpić zleganie, a w konsekwencji psucie się materiału, jeśli w porę nie zostanie on usunięty na zewnątrz.

Podczas długotrwałego przechowywania ziarna w zbiorniku dolne jego warstwy zostają zagęszczone pod wpływem panującego tam ciśnienia. Sprzyja to zleganiu materiału szczególnie w warunkach podwyższonej wilgotności

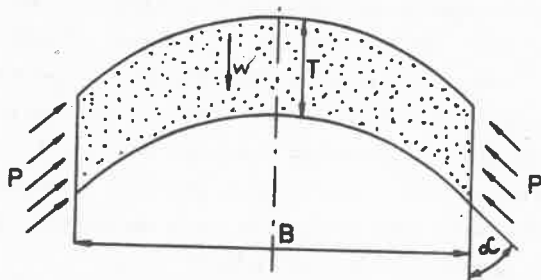
ci. Każdej takiej wartości zagęszczenia i działającego ciśnienia odpowiada określona wytrzymałość ośrodka związana z istnieniem granicy plastyczności. Powstają więc wtedy pewne problemy związane z grawitacyjnym przepływem ośrodka. Materiał przylega ściśle do ścian zbiornika, tworząc się zatory i sklepienia nad otworem wylotowym. Jeżeli ośrodek ma wystarczającą wytrzymałość do przeniesienia własnego ciężaru, to powstałe sklepienie może być trudne do usunięcia. Istotnie przyczyniają się do tego: zleganie, zamarzanie, siły spójności oraz małe rozdrobnienie. Jenike (25, 26) wykazał, że dla każdego zbiornika istnieje linia krytycznej wytrzymałości materiału. Istniejący w ośrodku stan naprężenia nie wystarcza do podtrzymania wytworzonego sklepienia i nie dochodzi do zatorów w przepływie materiału, jak długo rzeczywista wytrzymałość materiału znajduje się poniżej tej granicznej linii. Linia krytycznej wytrzymałości zależy od właściwości zmagazynowanego materiału, geometrii zbiornika, rodzaju powierzchni ścian itp.

W miarę opróżniania zbiornika, gdy maleje wysokość warstwy materiału, ulega zmianie stan naprężenia w zgromadzonym ośrodku. Pionowe naprężenie zaczyna maleć poniżej wartości naprężenia poziomego. Warunki sprzyjające powstaniu sklepienia nad otworem wylotowym zaistnieją wówczas, gdy pionowe naprężenie będzie równe zero. Siły styczne między poszczególnymi ziarnami w obszarze otworu wylotowego są wtedy wystarczające do podtrzymania masy ośrodka. W tym przypadku linia sklepienia będzie linią swobodnej powierzchni materiału i naprężenia normalne do niej (na całej jej długości) są równe zero (61). Na rysunku 4 przedstawiono schemat swobodnej powierzchni sklepienia utworzonego z materiału sypkiego. Równowagę sił, wynikającą z działania ciężaru materiału i pionowej składowej ciśnienia P skierowanej ku górze, dla małego łuku, można zapisać następująco (25):

$$w \frac{\pi}{4} B^2 T = PBT \cos \alpha \sin \alpha \quad (5)$$

lub

$$B = \frac{2P}{w} \sin 2\alpha. \quad (6)$$



Rys. 4. Schemat równowagi sił w ośrodku tworzącym sklepienie nad otworem wylotowym
 w - gęstość ośrodka; B - średnica otworu wylotowego; T - grubość warstwy ośrodka; P - ciśnienie; α - kąt sklepienia

Podstawiając za P maksymalną wytrzymałość ośrodka σ_c oraz zakładając, że $\sin 2\alpha = 1$, co daje najsilniejsze z możliwych sklepień, otrzymujemy graniczny wymiar otworu B , przy którym może powstać jeszcze sklepienie:

$$B \geq \frac{2\sigma_c}{w} \quad (7)$$

Znajomość praw rządzących przepływem materiałów sypkich przez otwory jest bardzo przydatna do projektowania różnych maszyn rolniczych, jak np. siewniki, rynny zsypane oraz urządzenia do automatycznego ładowania i rozładowywania zbiorników.

Mohsenin (35) omawiając ten problem wskazuje na trzy zasadnicze przyczyny, z powodu których nie można stosować praw hydrodynamiki do przepływu materiałów sypkich przez otwory:

- ciśnienie w materiale sypkim nie rozkłada się równo we wszystkich kierunkach z powodu powstawania zasklepień oraz na skutek istnienia tarcia między ziarnami;
- szybkość przepływu przez otwór nie jest proporcjonalna do wysokości warstwy materiału sypkiego z wyjątkiem przypadku, gdy wysokość jest mniejsza od średnicy zbiornika;

- szybkość przepływu zależy wyraźnie od wymiaru i kształtu cząstek ośrodka.

Istnieje wiele empirycznych równań określających przepływ materiałów sypkich przez otwór. Ogólnie przyjęto, że szybkość przepływu jest funkcją geometrii zbiornika i otworu, a także fizycznych właściwości materiałów sypkich. Istotną rolę odgrywają tu: wysokość warstwy ośrodka sypkiego, stosunek średnicy otworu do wysokości warstwy, kształt otworu i jego ułożenie, stosunek wymiarów poszczególnych ziaren ośrodka do średnicy otworu oraz takie podstawowe cechy materiałów, jak kształt, chropowatość, gęstość, porowatość, wilgotność itp.

Mohsenin (35) stwierdza dalej, że w najogólniejszym przypadku szybkość przepływu ośrodka można przedstawić jako potęgową funkcję średnicy otworu wylotowego:

$$Q = KW^n, \quad (8)$$

gdzie:

Q - szybkość przepływu ośrodka;

W - średnica zastępcza otworu;

K oraz n - stałe zawierające w sobie wszystkie pozostałe parametry dotyczące zarówno geometrii zbiornika, jak i fizycznych właściwości ośrodka.

W praktyce często zachodzi potrzeba zagęszczania bądź nawet brykietowania niektórych produktów rolniczych. Prasowanie materiałów rolniczych do dużej gęstości umożliwia bardziej skuteczną dalszą ich obróbkę, stwarza lepsze warunki konserwacji oraz pozwala wydatnie zmniejszyć przestrzeń niezbędną do zmagazynowania bądź transportu (33). Niezbędna jest wtedy znajomość podstawowych właściwości fizycznych zagęszczonego materiału, takich jak: sprężystość, tarcie wewnętrzne, zewnętrzne, spoiistość, charakterystyka procesu rozprężania i inne. Rozważając przykładowo jednowymiarowe zagęszczanie materiału o dużym współczynniku tarcia zewnętrznego w sztywnym zbiorniku należy wziąć pod uwagę, że reakcją na przyłożoną siłę ściskającą będzie suma wytworzonego stanu naprężenia oraz siły tarcia między zagęszczonym materiałem a ścianką zbiornika.

Mohsenin i Zaske (36) badając możliwość zagęszczania paszy o różnej wilgotności określili wpływ relaksacji naprężeń podczas zagęszczania na szczytkowe naprężenia pozostające w zbrykietowanym materiale oraz na trwałość zagęszczenia. Na tej podstawie można wyznaczyć optymalny czas ściskania niezbędny do trwałego zagęszczenia materiału. Podobnie Kjellaard i inni (27) badając zagęszczenie posiekanej paszy określili charakterystykę pelzania, relaksacji naprężeń oraz tarcia wewnętrznego zagęszczanego materiału w aparacie trójosiowego ściskania w zależności od wilgotności i wielkości poszczególnych części paszy. Uzyskane wyniki mogą być podstawą optymalnego projektowania procesów brykietowania pasz i innych produktów rolniczych.

Przytoczone wybrane zagadnienia mechaniki ośrodków rozdrobnionych, związane bezpośrednio z pracą urządzeń przeładunkowych i magazynów, wskazują na potrzebę dokładnego poznania praw rządzących ruchem dużych mas ziarnistych i rozdrobnionych, poprzez ustalenie mechanizmów odkształceń i przemieszczeń poszczególnych cząstek ośrodka. Istotny jest również problem zjawisk powierzchniowych na stykach poszczególnych ziaren, co decyduje o efektywnej sypkości ośrodka. Najczęściej ogół tych zjawisk opisuje się poprzez określenie tylko kąta tarcia wewnętrznego ośrodka. Uproszczenie takie, użyteczne niezmiernie w praktyce inżynierskiej, niewiele mówi o rzeczywistych procesach zachodzących w ośrodku i wymaga często użycia wielu dodatkowych parametrów, jeśli chcemy w miarę dokładnie opisać zachowanie się materiału.

TEORIA PLASTYCZNEGO PŁYNIĘCIA

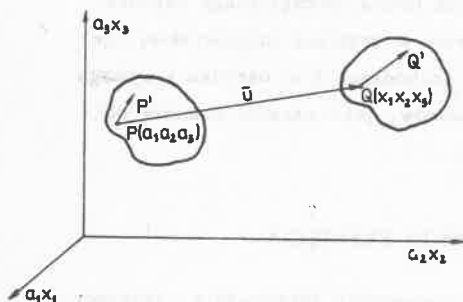
Omówione w poprzednim rozdziale zagadnienia składowania i transportu materiałów sypkich opierają się głównie na bardzo uproszczonych modelach ośrodków, wskutek czego uzyskiwane rozwiązania często znacznie odbiegają od rzeczywistości. Wpływa stąd konieczność pełniejszego poznania tych zjawisk, co jest możliwe przy równoczesnym prowadzeniu badań podstawowych, zmierzających do ustalenia elementarnych praw mechaniki ośrodków sypkich pochodzenia roślinnego. Badania te podejmują problem sformułowania odpowiednich kryteriów wytrzymałości ośrodków, praw plas-

tycznego płynięcia oraz konstruowania matematycznych modeli plastyczności.

Tensor odkształcenia i naprężenia

Mechanika ośrodków ciągłych traktuje odkształcenie ciała jako ciągłą zmianę nieskończenie małych odległości między sąsiednimi punktami ciała. W rzeczywistości każde ciało posiada strukturę wewnętrzną, zaś w ośrodkach sypkich i rozdrobnionych szczególnie wyraźnie zaznacza się nieciągłość budowy. Jednakże, jeśli zmiana stanu naprężenia na długości równej średniej odległości między ziarnami ośrodka jest niewielka, to przyjęcie założeń mechaniki ośrodków ciągłych nie wprowadza dużego błędu.

Oznaczmy trójką liczb a_i ($i = 1, 2, 3$) współrzędne punktu P ciała względem ustalonego prostokątnego kartezjańskiego układu współrzędnych. Jeśli na skutek jakichkolwiek oddziaływań fizycznych ciało ulegnie deformacji lub tylko sztywnemu przemieszczeniu, to punktowi P odpowiada teraz punkt Q o współrzędnych x_i ($i = 1, 2, 3$) względem tego samego układu współrzędnych (rys. 5).



Rys. 5. Odkształcenie ciała
 $\vec{u}$ - wektor przemieszczenia

Ciągłe i wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie punktu P na punkt Q możemy zapisać jako:

$$x_i = a_i + u_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad (9)$$

gdzie:

u_i - wektor przemieszczenia cząstki z punktu P do punktu Q.

Rozważmy dalej dwa punkty ciała leżące bardzo blisko siebie: punkt $P(a_1, a_2, a_3)$ oraz punkt $P'(a_1 + da_1, a_2 + da_2, a_3 + da_3)$. Po odkształceniu ciała punktowi P' odpowiada punkt Q o współrzędnych: $x_1 + dx_1$, $x_2 + dx_2$, $x_3 + dx_3$. Wektor $\bar{da}$ na skutek deformacji przechodzi w wektor $\bar{dx}$, którego współrzędne można wyrazić następująco:

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial a_j} da_j = \left(\delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial a_j} \right) da_j, \quad (10)$$

gdzie:

δ_{ij} - delta Kroneckera.

Kwadrat długości ds_0 nieodkształconego odcinka PP' wynosi:

$$ds_0^2 = da_i da_i, \quad (11)$$

a kwadrat długości ds odkształconego elementu jest równy:

$$ds^2 = dx_i dx_i. \quad (12)$$

Różnicę kwadratów długości elementów możemy zapisać bądź w konfiguracji pierwotnej ciała, bądź w konfiguracji końcowej:

$$ds^2 - ds_0^2 = 2 E_{ij} da_i da_j, \quad (13)$$

$$ds^2 - ds_0^2 = 2 e_{ij} dx_i dx_j. \quad (14)$$

Równanie (13) definiuje tensor odkształcenia Greena E_{ij} , natomiast równanie (14) tensor odkształcenia Almansi e_{ij} . E_{ij} jest często nazywany tensorem odkształcenia we współrzędnych Lagrange'a, podczas gdy e_{ij} tensorem odkształcenia we współrzędnych Eulera (cyt. wg 13).

Korzystając z zależności (9) oraz (10) tensory E_{ij} oraz e_{ij} można wyrazić w jawnej postaci:

$$\begin{aligned} E_{ij} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial x_k}{\partial a_i} \frac{\partial x_k}{\partial a_j} - \delta_{ij} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial a_j} + \frac{\partial u_j}{\partial a_i} + \frac{\partial u_k}{\partial a_i} \frac{\partial u_k}{\partial a_j} \right] \end{aligned} \quad (15)$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left[\delta_{ij} - \frac{\partial a_k}{\partial x_i} \frac{\partial a_k}{\partial x_j} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right] \quad (16)$$

W powyższych zależnościach składowe wektora przemieszczenia $\bar{u}$ są rozpatrywane jako funkcje położenia punktów ciała w konfiguracji pierwotnej a_i ($i = 1, 2, 3$), jeśli interesuje nas tensor odkształcenia w sensie Lagrange'a. Natomiast jeśli chcemy obliczyć tensor odkształcenia w sensie Eulera, to wektor przemieszczenia $\bar{u}$ należy wyrazić jako funkcję położenia punktów ciała w konfiguracji końcowej x_i ($i = 1, 2, 3$).

Dla bardzo małych odkształceń ciała, tzn. gdy wyrażenia typu $\frac{\partial u_i}{\partial a_j}$ są na tyle małe, że ich kwadraty można odrzucić nie popełniając dużego błędu, tensory odkształcenia E_{ij} oraz e_{ij} redukują się do tensora nieskończenie małego odkształcenia Cauchy'ego:

$$\mathcal{E}_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right], \quad (17)$$

gdyż nie ma wtedy żadnego znaczenia, czy pochodne przemieszczenia obliczamy względem punktów ciała przed odkształceniem czy po odkształceniu.

W przypadku dużych odkształceń ciała istnieje konieczność rozróżnienia, czy naprężenia i odkształcenia są mierzone względem konfiguracji pierwotnej ciała (opis Lagrange'a), czy też względem konfiguracji końcowej (opis Eulera). Jeżeli stan pierwotny ciała jest jego stanem naturalnym, np. beznaprężeniowy stan ośrodka sprężystego, to oczywiście jest odnoszenie przemieszczenia ciała do tego właśnie stanu. Odwrotnie jest zaś z tensorem naprężenia, gdyż korzystniej odnosić naprężenia do stanu odkształconego, ponieważ wielkość ta ma oczywistą interpretację fizyczną. Poszukując równania stanu ośrodka zmierzamy do ustalenia związku między tensorem naprężenia i odkształcenia, więc niezbędne jest wybranie jednego układu odniesienia: konfiguracji pierwotnej bądź konfiguracji ciała po odkształceniu.

Jeśli σ_{ij} jest tensorem naprężenia odniesionym do stanu odkształconego, zachodzi związek Cauchy'ego:

$$dT_i = \sigma_{ij} n_j dS, \quad (18)$$

gdzie:

$n_j(1,2,3)$ - składowe jednostkowego wektora normalnego do elementu powierzchni dS ciała odkształconego;

dT_i - składowe siły działającej na dS .

Aby określić tensor naprężenia w odniesieniu do stanu pierwotnego, należy ustalić reguły przyporządkowania między siłą działającą na element powierzchni odkształconej dT oraz siłą działającą na odpowiedni element powierzchni ciała w konfiguracji pierwotnej dT_0 . Korzystając z reguły Kirchhoffa (cyt. wg 13):

$$dT_{0i} = \frac{\partial a_i}{\partial x_j} dT_j, \quad (19)$$

otrzymujemy związek między tensorem Eulera σ_{ij} a tensorem Kirchhoffa S_{ij} :

$$S_{ij} = \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial a_i}{\partial x_\beta} \frac{\partial a_j}{\partial x_\alpha} \sigma_{\alpha\beta}, \quad (20)$$

gdzie: $\frac{\rho}{\rho_0} = \det \left| \frac{\partial a_i}{\partial x} \right|$ jest prawem zachowania masy, a ρ oraz ρ_0 gęstością materiału w stanie odkształconym i w stanie pierwotnym.

Stosowanie tensora Kirchhoffa S_{ij} w związkach naprężenie-odkształcenie ma tę zaletę, że jest on podobnie jak tensor Eulera σ_{ij} tensorem symetrycznym.

Plastyczne odkształcenia ośrodka są z natury rzeczy bardzo duże, zwłaszcza w ośrodkach sypkich i rozdrobnionych pochodzenia roślinnego, jak np. ziarno zbóż czy pasze. Duże są odkształcenia objętościowe zarówno odwracalne, jak i nieodwracalne. Chcąc więc podać bezpośrednią zależność naprężenie-odkształcenie dla takiego ośrodka należałoby uwzględnić dużą wartość odkształcenia (odkształcenie skończone), gdyż każdy chwilowy stan odkształcenia ośrodka musi być porównywany ze stanem pierwotnym, różniącym się znacznie od aktualnego. Fakt występowania odkształceń skończonych nie uwidacznia się natomiast w teorii plastycznego płynię-

cia, która formułuje przyrostowe związki konstytutywne ośrodka. Związek między przyrostem odkształcenia a aktualnym naprężeniem i jego przyrostem jest podobny do równania płynu lepkiego, gdzie naprężenia zależą od prędkości odkształcenia i nie ma potrzeby uwzględniania skończonych odkształceń ośrodka. Dlatego też w dalszej analizie podstawowych związków teorii plastycznego płynięcia korzystać będziemy z tensora naprężenia odniesionego do aktualnego stanu ośrodka, spełniającego związek Cauchy'ego (18), oraz z przyrostu tensora odkształcenia Cauchy'ego (17), którego składowe określa związek:

$$d \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial (du_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial (du_j)}{\partial x_i} \right], \quad (21)$$

gdzie du_i , du_j są składowymi wektora przyrostu przemieszczenia między stanem aktualnym ośrodka a bezpośrednim jego stanem poprzednim.

Przy określaniu składowych tensora naprężenia i odkształcenia duże znaczenie praktyczne ma odpowiedni wybór układu współrzędnych, tak aby interpretacja poszczególnych składowych tensorów była najprostsza. Najlepiej jest dokonać takiej transformacji układu współrzędnych, aby zniknęły wszystkie składowe styczne naprężenia, a pozostały tylko składowe normalne. Takie naprężenia nazywamy głównymi, zaś kierunki wzdłuż których one działają kierunkami głównymi, a prostopadłe do nich płaszczyzny - płaszczyznami głównymi. Wtedy stan naprężenia σ_{ij} w danym punkcie ośrodka można interpretować jako wektor w trójwymiarowej przestrzeni naprężeń głównych σ_1 , σ_2 , σ_3 :

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Naprężenia główne znajdujemy rozwiązując zagadnienie wartości własnych symetrycznej rzeczywistej macierzy σ_{ij} :

$$(\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}) n_i = 0. \quad (23)$$

Rozwijając wyznacznik równania (23) względem potęg σ otrzymujemy równość:

$$|\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}| = -\sigma^3 + I_1 \sigma^2 - I_2 \sigma + I_3 = 0, \quad (24)$$

gdzie I_1 , I_2 oraz I_3 są współczynnikami równania. Ponieważ naprężenia główne $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ określają fizyczny stan naprężenia w danym punkcie, więc muszą być niezależne od wyboru układu odniesienia. Wyrażenia I_1 , I_2 , I_3 są niezmiennikami przekształceń układu współrzędnych (nazywane są również niezmiennikami tensora naprężenia) i można wyrazić je następująco poprzez naprężenia główne: .

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \\ I_2 &= \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_1 \sigma_3, \\ I_3 &= \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3. \end{aligned} \quad (25)$$

W wielu zagadnieniach mechaniki ośrodków odkształcalnych korzystnie jest rozdzielić całkowity tensor naprężenia na dwie części (44,50): kulistą (wyrażającą hydrostatyczny stan naprężenia), oraz dewiatorową (odpowiadającą naprężeniom ścinającym). W przestrzeni naprężeń głównych można to wyrazić następująco:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2}{3} \end{bmatrix} \quad (26)$$

Część kulista tensora naprężenia wiąże się bezpośrednio z pierwszym niezmiennikiem I_1 :

$$\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \equiv \sigma_{sr} = \frac{I_1}{3}. \quad (27)$$

Podstawowe typy badań laboratoryjnych próbek materiałów sybkich

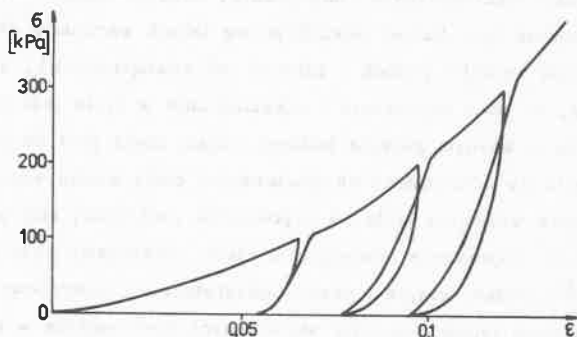
Naprężenia w ciele zależą od zmian wzajemnego położenia elementarnych cząstek, wywołanych na skutek oddziaływania sił zewnętrznych. Tak więc naprężenia są związane zależnością funkcyjną z odkształceniami, powstającymi pod działaniem sił zewnętrznych. Ustalenie tej zależności oraz określenie naprężeń i odkształceń, które powstają na skutek oddziaływania z zewnątrz, to podstawowe zagadnienie mechaniki ciał odkształcalnych.

Zależność między naprężeniami i odkształceniami w zasadzie może być ustalona na podstawie badania struktury atomowej materiału, czyli praw wzajemnego oddziaływania między cząstkami elementarnymi. Jednakże zastosowanie tego sposobu w praktyce napotyka poważne trudności już nawet w przypadku pojedynczego kryształu. Dlatego w mechanice zależności między naprężeniami i odkształceniami (jako wielkościami statystycznie uśrednionymi) ustala się bezpośrednio na podstawie przeprowadzonych prób na ciałach o różnych wymiarach. Próby te również są związane z poważnymi trudnościami. Jedną z nich wiąże się z niemożliwością bezpośredniego pomiaru wielkości mechanicznych (naprężenie, odkształcenie) wewnątrz ciała. W celu pokonania tych barier poszukuje się takich warunków eksperymentu (poprzez dobór kształtu próbek i zakresu sił zewnętrznych), aby można było przyjąć, że stan naprężenia i odkształcenia w ciele jest jednorodny, to znaczy, że w każdym punkcie badanej części ciała jest on jednakowy. Wtedy z pomiarów odkształceń na powierzchni ciała można wnioskować o odkształceniach wewnątrz ciała, a z pomiarów całkowitej siły zewnętrznej można wyliczyć naprężenia istniejące w ciele. Zakładamy przy tym, że ciało jest jednorodne, ciągłe i przed odkształceniem izotropowe (7).

Najprostszym typem pomiarów stosowanych powszechnie w mechanice ośrodków sybkich i rozdrobnionych są badania edometryczne, w których próbkę obciąża się wzdłuż osi pionowej, uniemożliwiając jednocześnie odkształcenia w kierunkach poziomych. Stąd odkształcenie osiowe jest dokładnie równe odkształceniu objętościowemu. Badania takie stosuje się powszechnie jako stosunkowo łatwe do przeprowadzenia i miarodajne, gdyż warunki odkształcenia podczas tych pomiarów są w przybliżeniu podobne

do warunków spotykanych często w rzeczywistości (np. osiadanie gruntów, zagęszczanie się ośrodków sypkich w zbiornikach i silosach pod wpływem własnego ciężaru). Największą trudnością pojawiającą się podczas badania edometrycznego jest występowanie tarcia bocznego. Ujemny wpływ tego zjawiska można częściowo ograniczyć przez odpowiedni dobór wymiarów próbki (możliwie mały stosunek wysokości próbki do jej średnicy) oraz przez wprowadzenie tzw. "pierścienia pływającego", który przemieszcza się wraz z osiadającą próbką materiału.

Na rysunku 7 przedstawiono krzywą cyklicznego obciążania próbki ośrodka sypkiego (ziarna pszenicy) w warunkach edometrycznych. Niezależnie od rodzaju badanego ośrodka (siano, pasza, ziarno zbóż, piasek, gleba) krzywe naprężenie-odkształcenie wykazują jakościowe podobieństwo (3,14,29,33,51). Szeroka pętla histerezy podczas pierwotnego obciążania świadczy o przewadze procesów dysypacyjnych w ośrodku nad procesami sprężystymi. Dla naprężeń mniejszych niż największe poprzednie ośrodek jest sztywniejszy przy ponownym obciążeniu. Natomiast po przekroczeniu maksymalnej wartości wcześniejszych naprężeń sztywność ośrodka maleje i zachowuje się on tak, jakby nie zachodziło nigdy odciążenie.



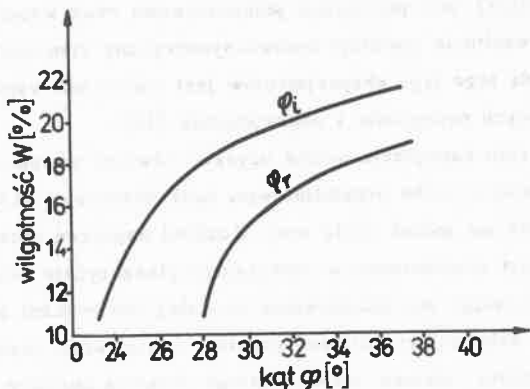
Rys. 7. Krzywa cyklicznego obciążania ośrodka sypkiego (ziarno pszenicy) w układzie edometrycznym

Badania edometryczne nie pozwalają uzyskać krytycznego stanu naprężenia, przydatne są więc tylko do oceny zachowania się ośrodków w obszarze zagęszczenia. Natomiast krytyczny stan naprężenia można osiągnąć w

aparacie trójosiowego ściskania. W badaniach takich próbka ośrodka (w kształcie walca) jest poddawana jednoosiowemu oraz wszechstronnemu ściskaniu. W rezultacie powstaje osiowo-symetryczny stan naprężenia: $\sigma_1 \neq \sigma_2 = \sigma_3$. Wadą tego typu eksperymentów jest narzucana współosiowość kierunków głównych naprężenia i odkształcenia (10).

Krytyczny stan naprężenia można uzyskać również w aparacie bezpośredniego ścinania o ruchu prostoliniowym bądź obrotowym (14). Badanie prostego ścinania ma jednak wiele wad. Rozkład naprężeń normalnych i stycznych nie jest równomierny w wymuszonej płaszczyźnie ścięcia. Stanu granicznego nie osiąga się jednocześnie na całej powierzchni ścięcia. Do bezsprzecznych zalet należy zaliczyć prostotę i możliwość szybkiego przeprowadzenia badania. Metoda bezpośredniego ścinania znajduje zastosowanie głównie do określania kąta tarcia wewnętrznego ośrodka sypkiego. Tangens tego kąta, równy jest stosunkowi naprężenia ścinającego do naprężenia normalnego w płaszczyźnie ścięcia. Powinien on też odpowiadać kątowi naturalnego usypu ośrodka, a więc takiemu, jaki utworzy z poziomą podstawą pobocznica stożka utworzonego na skutek sypania ziarna w jedno miejsce. Jednakże kąt usypu jest zwykle większy od kąta tarcia wewnętrznego. Wilgotność materiału (rys. 8) odgrywa istotną rolę przy formowaniu się stożka, a tym samym kąta usypu, nie wpływa natomiast tak widocznie na kąt tarcia wewnętrznego, toteż różnica między nimi szybko wzrasta wraz z wilgotnością (3,15).

Istotną cechą materiałów sypkich jest wzrost ich wytrzymałości na ścinanie w miarę wzrostu zagęszczenia. Typowe charakterystyki materiałów sypkich w próbie ścinania przy stałym naprężeniu normalnym przedstawia rysunek 9. Jeśli weźmiemy do badań ten sam materiał o dwóch różnych gęstościach ρ_1 i ρ_2 , przy czym $\rho_2 > \rho_1$, to dla tych samych programów obciążania otrzymamy dwie różne krzywe ścinania. Krzywa (1) na rysunku 9a przedstawia charakterystykę ścinania materiału o gęstości ρ_1 , mniejszej od pewnej gęstości krytycznej ρ_k ; krzywa ta monotonicznie rośnie aż do granicznej wartości naprężenia ścinającego, które osiąga przy dużych odkształceniach postaciowych. Natomiast dla gęstości początkowej $\rho_2 > \rho_k$, krzywa ścinania (2) osiąga najpierw maksimum, a następnie opada dążąc do tego samego naprężenia granicznego, leżącego poniżej wartości ekstre-

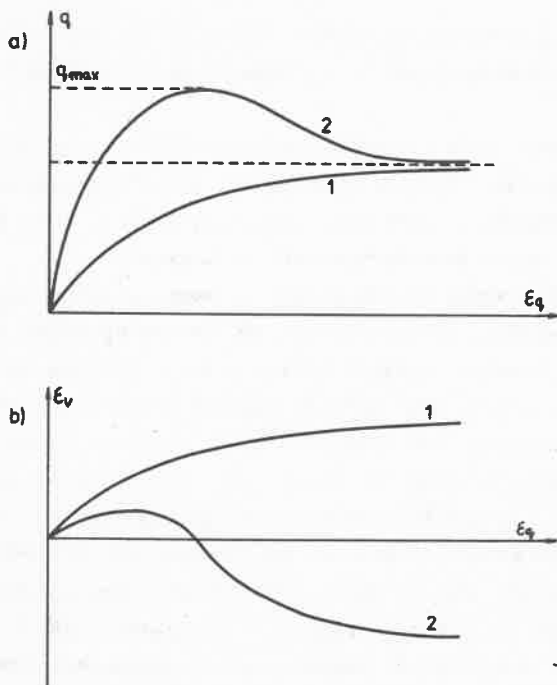


Rys. 8. Wpływ wilgotności na kąt usypu φ_i i kąt tarcia wewnętrznego φ_r ziarna pszenicy (3)

malnej. Zatem wartość graniczna naprężenia ścinającego nie zależy od początkowej gęstości materiału, która w trakcie ścinania dąży do wartości krytycznej ρ_k . Po osiągnięciu maksymalnej wartości naprężenia ścinającego ($q_{\max}$ na krzywej 2) materiał zachowuje się niestatecznie. Zazwyczaj próbka materiału ulega wtedy nagłemu zniszczeniu i opadającą część krzywej (2) trudno prześledzić. Odkształceniom postaciowym podczas próby ścinania towarzyszą również zmiany objętościowe. Rysunek 9b przedstawia zmiany objętościowe próbki materiału sypkiego w funkcji odkształceń postaciowych. Jeśli wyjściowa gęstość materiału była mniejsza od gęstości krytycznej, to podczas ścinania materiał zagęszcza się (krzywa (1) na rys. 9b). Natomiast, jeśli wyjściowa gęstość materiału była większa od gęstości krytycznej, to tylko w początkowej statecznej fazie procesu ścinania zachodzi dalsze zagęszczenie się materiału, które ustępuje w chwili osiągnięcia maksymalnej wytrzymałości. Następnie po wyczerpaniu się wytrzymałości (krzywa (2) na rys. 9b) materiał rozluźnia się dążąc do krytycznej gęstości ρ_k (1,12,24,25,55,56).

Na podstawie badań eksperymentalnych liczni autorzy (2,9,10,29,40, 45) następująco charakteryzują materiały sypkie i rozdrobnione:

1. Materiały rozdrobnione (ziarniste) wykazują cechy zarówno sprę-



Rys. 9. Zachowanie się ośrodka sypkiego w próbie ścinania
 a) 1 - krzywa ścinania ośrodka niezagęszczzonego, 2 - krzywa ścinania ośrodka w dużym zagęszczeniu; b) 1 - zmiany objętościowe ośrodka niezagęszczzonego podczas próby ścinania, 2 - zmiany objętościowe ośrodka o dużym zagęszczeniu podczas próby ścinania

żyste, lepkie, jak i plastyczne, przy czym lepkie uwidaczniają się szczególnie wyraźnie w przypadku materiałów o podwyższonej wilgotności (np. wilgotne ziarno zbóż).

2. W przypadku materiałów rozdrobnionych, dla których siły spójności między cząstkami są pomijalnie małe, a także poszczególne ziarna ośrodka są idealnie sztywne lub sprężyste (suchy piasek, suche ziarno zbóż), efekty lepkie można zaniedbać, traktując nieodwracalne deformacje materiału jako niezależne od czasu.

3. Nieodwracalne deformacje pojawiają się już nawet przy bardzo małych wartościach naprężeń.

4. Deformacje odwracalne - sprężyste, oraz nieodwracalne - plasty-

czne, wykazują wzajemne sprzężenie i zależą od gęstości ośrodka.

5. Deformacje sprężyste oraz plastyczne są nieliniowymi funkcjami naprężenia.

6. Występuje bardzo wyraźna zależność charakterystyk wytrzymałościowych od gęstości materiału (podczas hydrostatycznego ściskania rośnie sztywność materiału w miarę zagęszczania, podobnie w miarę zagęszczania materiału rośnie jego wytrzymałość na ścinanie).

7. Zmiany gęstości materiału sypkiego mogą być powodowane zarówno działaniem ciśnienia hydrostatycznego, jak również działaniem naprężeń ścinających. Działanie ciśnienia hydrostatycznego powoduje tylko zagęszczenie materiału, podczas gdy działanie naprężeń ścinających może powodować zarówno zagęszczanie, jak i rozluźnianie się struktury materiału, zależnie od wcześniejszej drogi obciążenia. Jeśli materiał nie był wstępnie zagęszczony, to w próbie bezpośredniego ścinania gęstość jego rośnie monotonicznie aż do granicznej wartości występującej podczas ustalonego plastycznego płynięcia. Jeśli natomiast próbie ścinania poddany jest materiał sypki, wstępnie silnie zagęszczony, to w początkowej fazie ścinania rośnie dalej jego gęstość aż do momentu przekroczenia maksymalnej wytrzymałości. Dalej materiał traci swą wytrzymałość, struktura wewnętrzna ulega rozluźnieniu aż do asymptotycznej wartości gęstości, występującej przy ustalonym plastycznym płynięciu.

8. Im bardziej zagęszczony był ośrodek, tym większy nastąpi przyrost jego objętości po przekroczeniu maksymalnej wytrzymałości.

9. W miarę wzrostu objętości ośrodka maleje jego wytrzymałość na odkształcenia (zmniejszenie oporu na odkształcenia jest najbardziej widoczne w przypadku próbek o największym zagęszczeniu).

10. W stadium końcowym ścinania siły działające między ziarnami maleją do tego stopnia, że możliwe jest ciągłe odkształcenie postaciowe (wywołane działaniem: sił ścinających) bez dalszej zmiany objętości próbki.

Kryteria wytrzymałości - idealna plastyczność

Plastyczność w ujęciu klasycznym to pojawianie się nieodwracalnych odkształceń ośrodka, gdy stan naprężenia przekroczy pewną krytyczną war-

tość (56). Powszechnie wprowadza się pojęcie warunku plastyczności lub tzw. funkcji uplastycznienia, która w przypadku ciała nie wykazującego efektów kierunkowych zależy tylko od niezmienników tensora naprężenia. Funkcja uplastycznienia $F(I_1, I_2, I_3) = 0$ przedstawia w przestrzeni naprężeń głównych $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ pewną powierzchnię zamkniętą, która oddziela stany sprężyste ciała lub stany ciała idealnie sztywnego (dla $F < 0$) od stanów plastycznych (gdy $F = 0$). W stanie plastycznym następuje niekontrolowane zniszczenie struktury ciała, w związku z tym przyjmuje się, że w materiale nie może pojawić się stan naprężenia, dla którego zachodziłaby nierówność

$$F > 0. \quad (29)$$

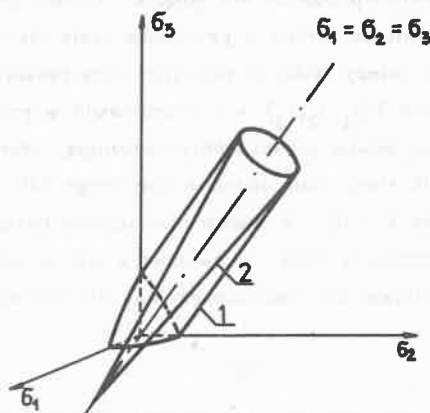
Zaproponowano wiele warunków plastyczności, które stanowią bardziej lub mniej trafne kryteria wytrzymałości materiałów. Na przykład dla metali, opierając się na powszechnie obserwowanym fakcie braku dostrzegalnego wpływu ciśnienia hydrostatycznego na wytrzymałość, przyjmuje się, że warunek plastyczności nie zależy od pierwszego niezmiennika tensora naprężenia. Mises (cyt. wg 13) przyjął ponadto, że funkcja uplastycznienia nie zależy również od trzeciego niezmiennika i sformułował znane powszechnie kryterium wytrzymałości $F = J_2 - \text{const.} = 0$, które przedstawia w przestrzeni naprężeń głównych powierzchnię walca. Oś symetrii walca pokrywa się z osią ciśnienia hydrostatycznego $p = \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ (rys. 10). Takie samo kryterium wytrzymałości uzyskał nieco wcześniej Huber (19) drogą rozważań energetycznych.

Zasadniczą cechą odróżniającą materiały sypkie i rozdrobnione od metali jest zależność wytrzymałości na ścinanie tych pierwszych od ciśnienia hydrostatycznego. Dlatego też odpowiedni warunek plastyczności powinien zależeć od niezmiennika I_1 stanu naprężenia.

Glazer (14) omawia rozszerzone kryterium Hubera-Misesa:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 - a_1(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) - b_1 = 0, \quad (30)$$

gdzie a_1, b_1 oznaczają stałe, które można wyznaczyć przeprowadzając badanie wytrzymałości na ściskanie oraz wytrzymałości na rozciąganie. Kryterium to przedstawia w przestrzeni naprężeń głównych powierzchnię



Rys. 10. Warunki plastyczności reprezentowane przez powierzchnie w przestrzeni naprężeń głównych

1 - warunek Misesa; 2 - rozszerzony warunek Hubera-Misesa

stożka, którego oś obrotu pokrywa się z osią izotropowych stanów naprężenia (rys. 10).

W badaniach statyki gruntów największą popularność znalazło kryterium wytrzymałości Coulomba-Mohra, według którego zniszczenie struktury następuje wzdłuż określonych płaszczyzn, gdy stosunek naprężenia ścinającego τ_f do naprężenia normalnego σ_n osiągnie graniczną wartość $\operatorname{tg} \varphi$:

$$|\tau_f| = \sigma_n \operatorname{tg} \varphi. \quad (31)$$

W ośrodkach spoistych naprężenie ścinające musi pokonać również naturalną spójność ośrodka c :

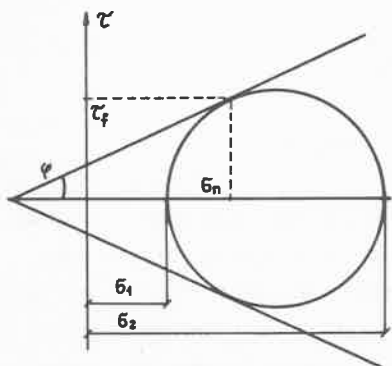
$$|\tau_f| = \sigma_n \operatorname{tg} \varphi + c. \quad (32)$$

Kąt φ nazywa się często kątem tarcia wewnętrznego ośrodka.

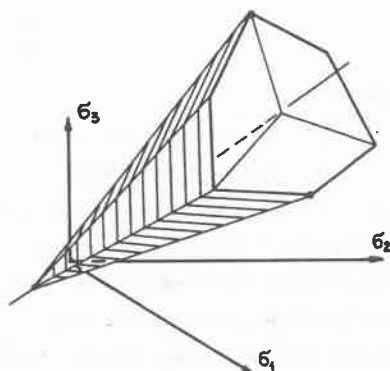
Dla płaskiego stanu naprężenia warunek Coulomba-Mohra w układzie współrzędnych σ - naprężenie normalne, τ - naprężenie ścinające przedstawia dwie proste (rys. 11), zaś w trójosiowym stanie naprężenia warunek ten wyraża następujący układ równań:

$$\begin{aligned}
 F_1 &= \frac{1}{2} |\sigma_1 - \sigma_2| - \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) \sin \varphi - c \cos \varphi = 0, \\
 F_2 &= \frac{1}{2} |\sigma_2 - \sigma_3| - \frac{1}{2} (\sigma_2 + \sigma_3) \sin \varphi - c \cos \varphi = 0, \\
 F_3 &= \frac{1}{2} |\sigma_3 - \sigma_1| - \frac{1}{2} (\sigma_3 + \sigma_1) \sin \varphi - c \cos \varphi = 0.
 \end{aligned}
 \tag{33}$$

W przestrzeni naprężeń głównych omawiany warunek przedstawia powierzchnię ostrosłupa o podstawie sześciokąta równobocznego i potrójnej symetrii, którego osią symetrii jest oś izotropowych naprężeń (rys. 12)



Rys. 11. Warunek plastyczności Coulomba-Mohra (24) dla płaskiego stanu naprężenia



Rys. 12. Warunek plastyczności Coulomba-Mohra dla trójosiowego stanu naprężenia

Powyższe kryteria wytrzymałości znalazły szerokie zastosowanie w wielu zagadnieniach statyki ośrodków sypkich i rozdrobnionych, gdzie interesujące było tylko oszacowanie granicznych naprężeń nie powodujących zniszczenia bądź parcia ośrodka rozdrobnionego na ściany zbiornika. Nie zajmowano się natomiast kinetyką ośrodka. Jednakże w wielu praktycznych zagadnieniach bardzo ważna jest znajomość praw fizycznych rządzących ruchem ośrodka rozdrobnionego zarówno w stanie maksymalnej wytrzymałości, jak i w granicznym stanie naprężenia (18,37,39,42,55). Innymi słowy istnieje potrzeba sformułowania związku fizycznego między tensorem naprężenia a tensorem odkształcenia.

Zaproponowano wiele praw fizycznych opisujących idealne plastyczne płynięcie, jednakże nie są one wystarczająco ogólne i ujmują tylko frag-

mentarycznie te zagadnienia. Zazwyczaj są to prawa oparte na założeniu istnienia potencjału plastycznego, którego nie da się w ogólności wyprowadzić ściśle drogą dedukcji. Należy więc założenie to potraktować jako aksjomat teorii plastycznego płynięcia, a poprawność takiej lub innej postaci potencjału stwierdzić tylko poprzez wykazanie, że uzyskane prawo płynięcia ośrodka jest zgodne z obserwacjami doświadczalnymi.

Potencjał plastyczny $G(\sigma_{ij}) = 0$ jest funkcją naprężenia i przedstawia pewną powierzchnię w przestrzeni naprężeń głównych. Prawo plastycznego płynięcia określa wzór:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \lambda \frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (34)$$

gdzie:

$\dot{\epsilon}_{ij}^p$ - tensor prędkości odkształcenia plastycznego,
 λ - nieujemny współczynnik.

Związek (34) oznacza, że przyjmujemy współosiowość kierunków głównych tensora naprężenia i tensora prędkości odkształcenia, co jest wyrazem izotropowości ośrodka podczas plastycznej deformacji. Istnieje prosta interpretacja geometryczna tego związku: w przestrzeni kierunków głównych tensor prędkości odkształcenia jest normalny do powierzchni reprezentującej potencjał G .

Potencjał plastyczny G bywa często utożsamiany z warunkiem plastyczności F , $G=F$ (35). Mówimy wtedy o tzw. stowarzyszonym prawie plastycznego płynięcia:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (35)$$

Potencjalne prawo płynięcia idealnie plastycznych ośrodków rozdrobnionych określa prędkość płynięcia z dokładnością do stałej mnożenia λ . Jednoznacznie więc określony jest tylko kierunek wektora $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ w przestrzeni naprężeń oraz prędkości odkształceń głównych.

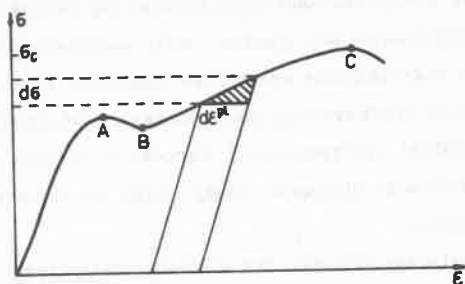
Dla idealnie plastycznego ośrodka sypkiego pozbawionego cech reologicznych Drescher (10) omawia zaproponowane przez Druckera i Pragera potencjalne prawo płynięcia plastycznego, gdzie potencjałem plastycznym jest warunek plastyczności Coulomba-Mohra (33). Takie prawo płynięcia

przewiduje jednak nieograniczone rozluźnianie się ośrodka. Prędkość odkształcenia objętościowego jest ujemna, jeśli naprężenie ściskające oraz odpowiadające im odkształcenia uznamy za dodatnie. Powyższe prawo może więc być jedynie aproksymacją początkowego rozluźniania się (po przekroczeniu maksymalnej wytrzymałości) ośrodka uprzednio zagęszczonego, gdyż w stanie ustalonego płynięcia plastycznego nie obserwuje się już zmian objętościowych.

Potencjał plastyczny dla ośrodka idealnie plastycznego można wybierać w różny sposób, konstruując stowarzyszone bądź niestowarzyszone prawo plastycznego płynięcia. Uzyskane związki nie są jednakże nigdy w pełni zgodne z wynikami badań doświadczalnych i ujmują tylko pewien aspekt plastycznej deformacji (np. rozluźnianie się struktury ośrodka bądź ustalone płynięcie plastyczne).

Plastyczne płynięcie materiałów statecznych

Model ciała idealnie plastycznego jest na ogół bardzo niedoskonałym przybliżeniem rzeczywistego zachowania się ciała, którego struktura ulega zniszczeniu na skutek przyłożenia zbyt dużych obciążeń. Zazwyczaj nie obserwuje się natychmiastowego zniszczenia całej struktury ciała, lecz proces ten przebiega stopniowo i wymaga przyłożenia coraz wyższych wartości naprężenia. Typowy przykład jednoosiowego rozciągania materiału roślinnego poza granicę sprężystości aż do momentu całkowitego zniszczenia przedstawiono na rysunku 13. Po przekroczeniu granicy sprężystości w punkcie A następuje zniszczenie początkowo najsłabszych elementów budowy ciała, co nie oznacza całkowitego zniszczenia struktury. Mohsenin (35) nazywa to naprężenie granicą płynności biologicznej. Dalsze nieodwracalne odkształcenie aż do momentu całkowitego wyczerpania wytrzymałości jest możliwe przy odpowiednim wzroście naprężenia do wartości σ_c . Naprężenie σ_c autor ten nazywa granicą wytrzymałości biologicznej. Odcinek BC krzywej rozciągania nosi nazwę obszaru wzmocnienia i charakteryzuje się tym, że przyrost odkształcenia plastycznego $d\epsilon^p$ możliwy jest tylko jako skutek przyłożenia dodatniego przyrostu naprężenia $d\sigma$. Przyrost naprężenia zewnętrznego $d\sigma$ wykonuje więc dodatnią pracę na przy-



Rys. 13. Typowa charakterystyka naprężenie-odkształcenie dla materiału biologicznego
A - granica sprężystości; B - granica płynności biologicznej; C - granica wytrzymałości biologicznej

roście odkształcenia plastycznego $d\epsilon^P$:

$$d\sigma d\epsilon^P > 0. \quad (36)$$

Materiały takie nazywamy materiałami statecznymi (47).

Oczywisty jest fakt, że w tym zakresie obciążenia możliwe jest ustalenie jednoznacznej zależności $\sigma - \epsilon$ zarówno dla części sprężystej odkształcenia, jak i dla części plastycznej.

Podobnie w złożonym stanie naprężenia zniszczenie struktury ciała (bądź ustalone nieograniczone plastyczne płynięcie ośrodka) nie następuje natychmiast. Z reguły występuje wcześniej pewien zakres kontrolowanego trwałego odkształcenia. Dla niektórych dróg obciążenia bądź dla wybranych ośrodków może w ogóle nie wystąpić stan krytyczny, a mimo to ciało będzie się trwale odkształcać, przy czym wielkość rozpraszanej energii podczas takiego procesu jest praktycznie niezależna od prędkości, co klasyfikuje proces raczej jako plastyczny niż lepki (46).

Drucker (11) rozszerzył definicję materiałów statecznych na złożone stany naprężenia analizując ciało znajdujące się w stanie naprężenia σ_{ij} oraz w stanie odkształcenia ϵ_{ij} . Rozważa on pracę wykonaną przez czynnik zewnętrzny, wskutek którego do ciała zostaje przyłożony powoli pewien dodatkowy przyrost sił, a następnie zostaje powoli usunięty. Według tego autora materiał jest stateczny, jeśli praca wykonana przez przyrost sił zewnętrznych wywołujących przyrosty odpowiednich składowych wektora

przemieszczenia (podczas cyklu przykładania i usuwania obciążenia) jest nieujemna. Jeśli z kolei przyrost sił zewnętrznych zmienił jednorodny stan naprężenia wewnątrz ciała o $d\sigma_{ij}$ i stan odkształcenia o $d\epsilon_{ij}$, oraz jeśli powyższe przyrosty można uznać za małe, to postulat Druckera przedstawia się następująco (47, 48):

$$d\sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^p \geq 0, \quad (37)$$

co oznacza, że praca przyrostu sił zewnętrznych została rozproszona na trwałe odkształcenie ciała. Całkowity przyrost odkształcenia $d\epsilon_{ij}$ możemy zapisać jako:

$$d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij}^p + d\epsilon_{ij}^{spr}. \quad (38)$$

Ponieważ dla ciała sztywnego $d\epsilon_{ij} = 0$, więc siły zewnętrzne nie wykonują żadnej pracy. Jeśli ciało jest sprężyste, wtedy $d\epsilon_{ij}^p = 0$ i cały przyrost odkształcenia jest odwracalny, a więc w cyklu obciążenie-odciążenie ciało również nie pochłania energii. Jeśli natomiast ciało jest plastyczne lub sprężysto-plastyczne, przyrosty sił zewnętrznych wykonują pracę tylko na plastyczne odkształcenie.

W opisie jakościowym za ciało stateczne uważa się takie, którego aktualna konfiguracja jest określona przez historię obciążenia w tym sensie, że "małe" zaburzenie obciążenia powoduje "małe" wychylenie ciała ze stanu poprzedniej równowagi (nie może też wystąpić spontaniczna zmiana konfiguracji). Natomiast trudno jest w sposób ilościowy zdefiniować "małe" zaburzenie i "małe" odchylenie od równowagi, jeśli rozważamy nieodwracalne procesy układów dysypatywnych, które w ogólności nie wracają do swego początkowego stanu po usunięciu zakłóceń. Ponadto trudno jest eksperymentalnie prześledzić zachowanie się ciała niestatecznego, a zwłaszcza zarejestrować ujemną pracę przyrostu sił zewnętrznych. W ogólności masy obciążające badane ciało pochłaniają wyzwoloną z niego spontanicznie energię na przyspieszenie i obserwujemy tylko nagłe niekontrolowane przemieszczenie, z którego wnioskujemy o uszkodzeniu struktury ciała, a więc o utracie stateczności.

Definicja stateczności Druckera wyróżnia pewną wąską grupę materiałów bądź procesów spośród wszystkich znanych i fizycznie dopuszczalnych.

Jest jednakże o tyle ciekawa, że narzucając pewne ograniczenia umożliwia znalezienie jednoznacznej zależności $d\sigma_{ij} - d\epsilon_{ij}^p$ w zakresie plastycznej deformacji materiału. W rozważaniach tych pomija się całkowicie efekty reologiczne, a więc uzyskiwane związki uzależniają trwałą deformację tylko od stanu naprężenia. Pojęciem podstawowym jest nadal warunek plastyczności, przy czym w przypadku materiałów statecznych ma on znacznie szerszy sens. W stanie granicznym $F = 0$ materiał nie ulega zniszczeniu, lecz na skutek zmiany struktury wewnętrznej spowodowanej trwałym odkształceniem "wzmacnia" się, co oznacza, że dalsze odkształcenie wymaga przyłożenia odpowiednio większego naprężenia. Materiał ma wtedy nie jeden warunek plastyczności, lecz całą ich rodzinę:

$$F(\sigma_{ij}, \alpha) = 0, \quad (39)$$

gdzie α jest pewnym parametrem wzmocnienia. Jeśli pomimo odkształcenia plastycznego materiał pozostaje nadal izotropowy, to efekt ten nazywamy wzmocnieniem izotropowym. W takim przypadku parametr α nie wpływa na postać warunku plastyczności, lecz powoduje tylko równomierny wzrost naprężeń uplastyczniających. Jako parametr α można przyjąć dowolną, monotonicznie rosnącą, skalarną funkcję tensora odkształcenia plastycznego ϵ_{ij}^p .

W stanie naprężenia σ_{ij} spełniającym warunek plastyczności (39) materiał odkształca się plastycznie lub nie odkształca zależnie od kierunku przyrostu naprężenia $d\sigma_{ij}$.

Rozważmy przyrost funkcji F :

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial F}{\partial \alpha} d\alpha, \quad (40)$$

gdzie $\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}$ przedstawia zewnętrzną normalną do powierzchni plastyczności, będącej geometryczną interpretacją warunku plastyczności w przestrzeni naprężeń σ_{ij} . Z doświadczenia wiadomo, że powierzchnia plastyczności rozszerza się przy rosnącym odkształceniu plastycznym i wobec tego zachodzi nierówność:

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} < 0. \quad (41)$$

Z definicji warunku plastyczności możliwe jest tylko

$$dF \leq 0, \quad (42)$$

gdy $F = 0$.

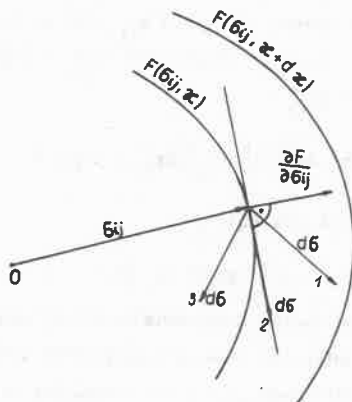
Dla $dF < 0$ mamy:

$$F + dF < 0. \quad (43)$$

Proces taki prowadzi do uzyskania sprężystych stanów ośrodka i nosi nazwę procesu odciążania. Nie zachodzą wtedy odkształcenia plastyczne, czyli $dz = 0$, co łącznie z (40) daje:

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} < 0, \quad F = 0. \quad (44)$$

Nierówność (44) oznacza, że wektor przyrostu naprężenia $d\sigma_{ij}$ jest skierowany do wewnątrz powierzchni plastyczności (rys. 14).



Rys. 14. Trzy możliwe rodzaje zachowania się materiału w stanie plastycznym

1 - obciążenie aktywne; 2 - obciążenie neutralne; 3 - odciążenie

Ponieważ drugi składnik różniczki (40) jest niedodatni, więc $dF = 0$ może zachodzić tylko w dwóch przypadkach: gdy obydwa składniki są równe zero lub gdy pierwszy jest dodatni, a drugi ujemny. Pierwszy przypadek opisuje tzw. obciążanie neutralne, to jest proces, podczas którego materiał znajduje się nieustannie na granicy plastyczności $F = 0$. Jednakże nie zachodzi wtedy odkształcenie plastyczne, zaś wektor przyrostu naprężenia jest skierowany stycznie do powierzchni plastyczności:

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = 0, \quad F = 0. \quad (45)$$

Drugi przypadek opisuje "aktywne" obciążanie materiału, podczas którego zachodzi plastyczne odkształcenie $d\varepsilon_{ij}^P > 0$, a więc $d\alpha > 0$. Na skutek wzmocnienia materiału powierzchnia plastyczności rozszerza się od $F(\sigma_{ij}, \alpha)$ do $F(\sigma_{ij}, \alpha + d\alpha)$. Proces ten jest możliwy wtedy, kiedy wektor przyrostu naprężenia $d\sigma_{ij}$ jest skierowany na zewnątrz powierzchni plastyczności:

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} > 0, \quad F = 0, \quad (46)$$

a więc tworzy kąt ostry z zewnętrzną normalną $\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}$ do powierzchni plastyczności. Podobnie definicję (37) materiałów statecznych Druckera można rozważać w przestrzeni naprężeń σ_{ij} jako warunek nałożony na iloczyn skalarny wektora przyrostu naprężenia $d\sigma_{ij}$ i wektora przyrostu odkształcenia plastycznego $d\varepsilon_{ij}^P$

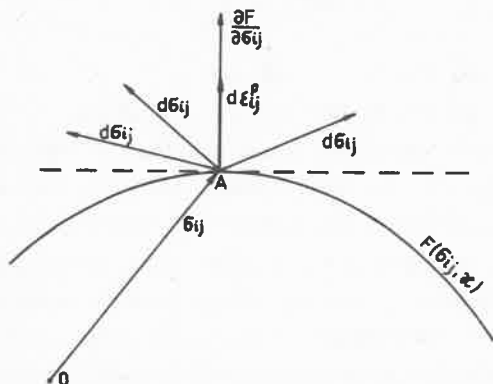
$$d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^P = |d\sigma_{ij}| |d\varepsilon_{ij}^P| \cos \psi \geq 0. \quad (47)$$

Stąd otrzymujemy warunek dla kąta ψ :

$$-\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}. \quad (48)$$

Jeżeli weźmiemy pod uwagę wszystkie możliwe kierunki wektora $d\sigma_{ij}$ powodujące plastyczne odkształcenie, to spełnienie warunku (47) wymaga, aby wektor $d\varepsilon_{ij}^P$ był skierowany zgodnie z normalną zewnętrzną do powierzchni plastyczności $\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}$ (rys. 15).

Na rysunku 15 linią przerywaną oznaczono hiperpłaszczyznę normalną do $d\varepsilon_{ij}^P$, ograniczającą wszystkie możliwe kierunki wektora $d\sigma_{ij}$ w aktywnym stanie obciążenia. Hiperpłaszczyzna ta jest styczna do powierzchni plastyczności w punkcie A, reprezentującym aktualny stan obciążenia. Ponieważ w regularnym punkcie A powierzchni F istnieje tylko jedna normalna, a powierzchnia F leży po jednej stronie stycznej, więc kierunek $d\varepsilon_{ij}^P$ jest jednoznacznie określony, zaś powierzchnia plastyczności jest wypukła. Można zatem zapisać następujący związek:



Rys. 15. Możliwe przyrosty naprężenia wywołujące przyrost odkształcenia

$$d\epsilon_{ij}^p$$

$$d\epsilon_{ij}^p = \Lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (49)$$

który oznacza, że dla materiałów statecznych spełniających nierówność (37) warunek plastyczności $F(\sigma_{ij}, \alpha) = 0$ stanowi potencjał plastyczny. Z definicji materiałów statecznych oraz warunków aktywnego obciążania wynika, że Λ jest nieujemne. W myśl równania (49) kierunek wektora przyrostu $d\epsilon_{ij}^p$ nie musi pokrywać się z kierunkiem wektora przyrostu naprężenia $d\sigma_{ij}$ wywołującego $d\epsilon_{ij}^p$.

Jeżeli w różniczkę (40) zapiszemy $d\alpha$ jako $\frac{\partial \alpha}{\partial \epsilon_{ij}^p} d\epsilon_{ij}^p$ oraz uwzględnimy związek (49) to znajdziemy Λ jako funkcję aktualnego stanu naprężenia σ_{ij} , przyrostu naprężenia $d\sigma_{ij}$ oraz historii odkształcenia wyrażonej poprzez parametr wzmocnienia α :

$$\Lambda = - \frac{\frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} d\sigma_{kl}}{\frac{\partial F}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \epsilon_{mn}^p} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{mn}}}. \quad (50)$$

Łącznie z warunkami aktywnego stanu obciążenia potencjalne prawo plastycznego płynięcia materiałów statecznych można zapisać w następują-

cej postaci:

$$d\varepsilon_{ij}^p = \Lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (51)$$

gdzie $\Lambda > 0$ dla $F = 0$, $dF = 0$
 oraz $\Lambda = 0$ dla $F < 0$ lub $F = 0$, $dF < 0$.

W złożonym stanie naprężenia powyższe równanie różniczkowe na ogół nie jest całkowalne. Fakt ten oraz złożony i nieliniowy charakter prawa plastycznego płynięcia ograniczają bardzo jego stosowalność. Różniczkowe prawo plastycznego płynięcia jest całkowalne tylko dla przypadku tzw. proporcjonalnego obciążania, to jest dla stałego kierunku tensora naprężenia. Scałkowane równanie różniczkowe wyraża bezpośrednią zależność między tensorem naprężenia oraz tensorem odkształcenia plastycznego i jest identyczne ze związkami konstytutywnymi teorii odkształceniowej, zakładającej, że stan odkształcenia plastycznego jest jednoznacznie określony przez aktualny stan naprężenia (47).

Plastyczne odkształcenia ośrodków sypkich i rozdrobnionych są zazwyczaj bardzo duże, powstaje więc problem definiowania tensora naprężenia i odkształcenia, jeśli poszukujemy bezpośredniej zależności $\sigma - \varepsilon^p$.

Rzeczywiste materiały wykazują zarówno cechy sprężyste, plastyczne, jak i lepkie. Często trudno wybrać jedną z nich i pominąć całkowicie pozostałe. O ile równoczesny opis właściwości sprężystych i plastycznych lub sprężystych i lepkich nie przedstawia większych trudności, to łączne traktowanie lepkości i plastyczności okazuje się bardzo skomplikowane. Reologia uzależnia stan naprężenia i odkształcenia od czasu, zaś teoria plastycznego płynięcia uzależnia te stany od drogi obciążenia. Aktualny stan będzie więc zależny od historii obciążenia, rozumianej jako droga obciążenia przebywana w określonym czasie. Przy znacznych prędkościach odkształceń efekty czasowe często są nie do pominięcia, a z kolei w powolnych procesach istotny może być wpływ pełzania na wzmocnienie bądź na utratę stateczności materiału. Dlatego też zachodzi konieczność łącznego traktowania płynięcia lepkiego i plastycznego jako jednej nieodwracalnej deformacji, choć często dla uproszczenia zagadnienia i uzyskania efektywnych rozwiązań zakłada się addytywność odkształceń lepkich i plastycznych.

Perzyna (48) rozważa zachowanie się materiału sprężysto-lepko-plastycznego, który wykazuje cechy lepkie zarówno przed, jak i po uplastycznieniu. Pomimo ograniczenia rozważań do materiałów statecznych i upraszczającego rozdzielenia tensora odkształcenia na część sprężystą, lepką i plastyczną łączny opis tych trzech zjawisk wprowadza wiele niejednoznaczności. Naghdi i Murch (41) wprowadzili funkcję uplastycznienia zależną od stanu naprężenia, stanu odkształcenia, parametrów wzmocnienia oraz od pewnego skalarnego parametru reprezentującego efekty lepkie. Uwzględnienie lepkości powoduje, że ten sam stan plastyczny można osiągnąć w różnych punktach drogi obciążenia zależnie od prędkości procesu. Ponadto kierunek wektora przyrostu odkształcenia plastycznego nie jest jednoznacznie określony, lecz może się zawierać w pewnym stożku prostopadłym do chwilowej powierzchni płynięcia, którego kąt rozwartości zależy od wielkości efektów lepkich.

Model ośrodka sypkiego o wzmocnieniu gęstościowym

Jeśli ośrodek sypki jest poddany działaniu dowolnych naprężeń zewnętrznych wywołujących jego deformację, to może osiągnąć stan graniczny i płynąć plastycznie jak nieściśliwa ciecz z tarcie wewnętrznym. Koncepcja ośrodka o wzmocnieniu gęstościowym stara się przewidzieć całkowitą zmianę warunków z dowolnego statecznego stanu początkowego do dowolnego innego stanu statecznego lub do końcowego stanu granicznego (z nieograniczonym plastycznym płynięciem w warunkach stałego naprężenia i stałej gęstości ośrodka).

Model ten powstał jako uogólnienie podstawowych faktów doświadczalnych, takich jak: zagęszczanie lub rozluźnianie się ośrodka sypkiego w próbie ścinania, zależność wytrzymałości ośrodka od gęstości, nieodwracalne zagęszczanie się ośrodka pod działaniem ciśnienia hydrostatycznego, idealne plastyczne płynięcie w stanie granicznym. Odpowiednikiem makroskopowe stwierdzanego wzrostu wytrzymałości ośrodka przy wzroście gęstości może być wzrost energii wiązań adhezyjnych między poszczególnymi ziarnami w miarę wzrostu powierzchni kontaktu, czyli podczas zmniejszania się średniej odległości między środkami poszczególnych ziaren (33).

Założono więc, że ośrodek sypki czy rozdrobniony ma nie jedną granicę plastyczności lecz całą ich rodzinę, przy czym parametrem wzmocnienia jest jego gęstość ρ . Ponieważ większej gęstości odpowiada większa wytrzymałość, więc warunek plastyczności jest monotonicznie rosnącą funkcją gęstości. Dla ustalonego ρ warunek plastyczności przedstawia w przestrzeni naprężeń zamkniętą obrotową powierzchnię przechodzącą przez początek układu współrzędnych, której osią symetrii jest oś ciśnienia hydrostatycznego. Jest to zgodne z założonym brakiem wytrzymałości na rozciąganie (ośrodek sypki) oraz z obserwowanym nieodwracalnym zagęszczaniem się ośrodka pod działaniem ciśnienia hydrostatycznego (8,10). Dla uproszczenia przyjęto, że warunek plastyczności nie zależy od trzeciego niezmiennika tensora naprężenia. W osiowo-symetrycznym stanie naprężenia można więc warunek plastyczności zapisać w układzie współrzędnych (p, q) jako:

$$F(p, q, \rho) = 0, \quad (52)$$

gdzie

$$p = \frac{1}{3}(\sigma_1 + 2\sigma_2) \quad (53)$$

$$q = \sigma_1 - \sigma_2$$

oraz

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_3.$$

Szczególną postać warunku (52) można otrzymać drogą eksperymentalnego wyznaczenia odpowiedniej liczby stałych najlepiej opisujących ten proces.

Nieco odmienne rozważania doprowadziły Schofielda i Wrotha (50) do jednoznacznego określenia postaci warunku plastyczności (52). Podstawą zaproponowanego modelu jest założenie, że stan krytyczny ośrodka jednoznacznie określa następujący układ równań:

$$q = Mp, \quad (54)$$

$$v = \Gamma - \lambda \ln p, \quad (55)$$

gdzie stałe M, Γ, λ przedstawiają podstawowe właściwości ośrodka. Równanie (54) jest najprostszym przypadkiem warunku plastyczności Coulomba-Mohra, zaś równanie (55) określa zależność objętości próbki od ciśnienia hydrostatycznego w krytycznym stanie naprężenia. Dla tego modelu przyjęto najprostszy mechanizm rozpraszania pracy sił zewnętrznych, tj.

proces tarcia towarzyszący odkształceniu postaciowemu ośrodka:

$$p d\epsilon_p + q d\epsilon_q = \frac{dW}{v} = Mp |d\epsilon_q|, \quad (56)$$

przy czym przyrost odkształcenia objętościowego $d\epsilon_p$ oraz przyrost odkształcenia postaciowego $d\epsilon_q$ definiują związki:

$$\left. \begin{aligned} d\epsilon_p &= \frac{dv}{v} = d\epsilon_1 + 2 d\epsilon_2, \\ d\epsilon_q &= \frac{2}{3} (d\epsilon_1 - d\epsilon_2), \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

gdzie $\frac{dW}{v}$ jest przyrostem pracy sił zewnętrznych przypadającym na jednostkę objętości ośrodka. Ponieważ odkształcenie plastyczne wiąże się zawsze z rozpraszaniem energii, więc musi zachodzić nierówność:

$$\frac{dW}{v} > 0. \quad (58)$$

Rozważając dalej wszystkie możliwe przyrosty wektora naprężenia w dowolnym punkcie (p, q) leżącym na powierzchni plastyczności przy zachowaniu warunku stateczności Druckera:

$$\frac{\dot{p}v}{v} + \dot{q} \dot{\epsilon}_q \geq 0, \quad (59)$$

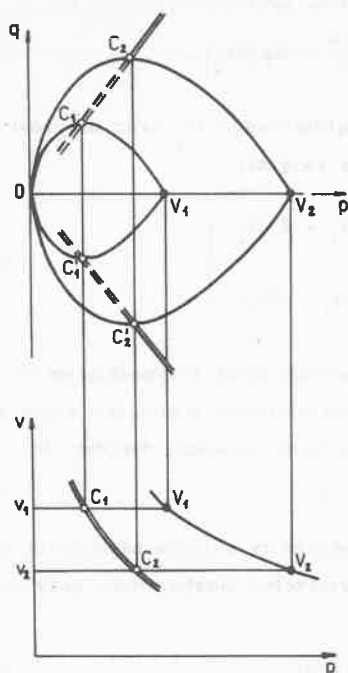
otrzymano różniczkowe równanie krzywej plastycznego płynięcia dla ustalonej wartości objętości próbki v :

$$\frac{dq}{dp} = - \left(M - \frac{q}{p} \right). \quad (60)$$

Całkując powyższe równanie przy warunkach brzegowych wyrażonych poprzez równanie stanu krytycznego (55) otrzymano krzywą plastycznego płynięcia dla określonej objętości próbki v . Jeśli na skutek zagęszczenia ośrodka zmaleje jego objętość, to ulegnie ona izotropowemu rozszerzeniu zgodnie z równaniem (55). Rozpatrywanie rodziny krzywych plastycznego płynięcia (rys. 16) zastąpiono warunkiem plastyczności przedstawionym w trójwymiarowej przestrzeni (p, v, q) powierzchnią określoną związkiem:

$$|q| = Mp \left(1 - \frac{\Gamma - v}{\lambda} - \ln p \right). \quad (61)$$

Równanie to określa maksymalną wartość naprężenia ścinającego q jako funkcję ciśnienia hydrostatycznego p oraz aktualnej objętości v . Przekro-



Rys. 16. Rodzina krzywych plastyczności w przestrzeni naprężeń (pq)

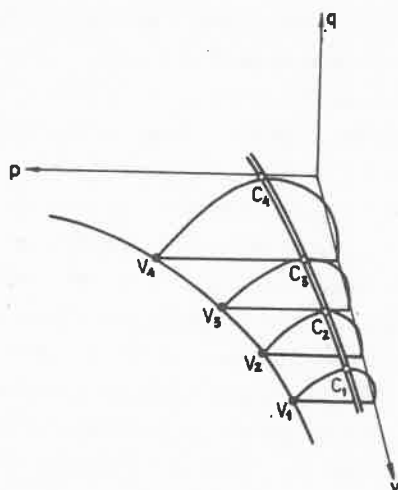
czenie tej wartości naprężenia ścinającego powoduje plastyczne odkształcenie ośrodka. Połowę powierzchni dla dodatnich wartości q przedstawia rysunek 17, gdzie linia krytyczna $C_1 C_2 C_3 C_4$ dzieli wszystkie możliwe stany plastyczne na dwie kategorie. Jeśli w stanie plastycznym zachodzi:

$$|q| < M_p, \quad (62)$$

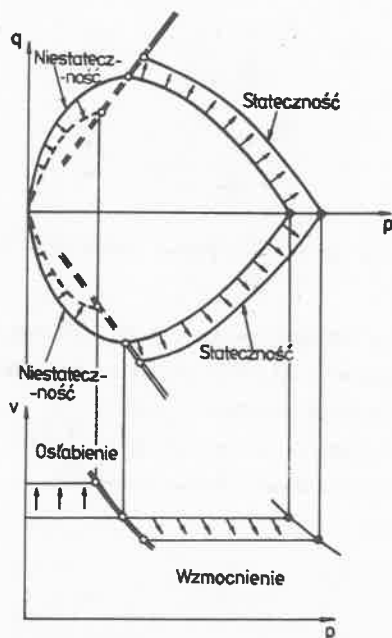
to dodatkowy przyrost naprężenia skierowany na zewnątrz powierzchni plastyczności powoduje stateczne zagęszczanie ośrodka. Powierzchnia plastyczności ulega rozszerzeniu i materiał staje się bardziej wytrzymały. Omawiany proces nosi nazwę wzmocnienia. Natomiast jeśli dla ośrodka znajdującego się w stanie plastycznym zachodzi:

$$|q| > M_p, \quad (63)$$

to dodatkowy przyrost naprężenia powoduje wytrącenie układu ze stanu nie-stabilnej równowagi. Następuje wtedy nagle niekontrolowane odkształcenie ośrodka, któremu towarzyszy rozluźnienie struktury, tj. wzrost objętości ośrodka. Odpowiednia powierzchnia plastyczności kurczy się, czyli wytrzymałość ośrodka maleje. Proces ten nosi nazwę osłabienia. Rysunek 18 jest



Rys. 17. Powierzchnia plastyczności w przestrzeni (p, q, v)



Rys. 18. Stateczne i niestateczne zachowanie się ośrodka w różnych stanach naprężenia

poglądowym przedstawieniem statecznego i niestatecznego zachowania się materiału. Wielu autorów przyjmuje dla ośrodków sypkich i rozdrobnionych stowarzyszone z warunkiem plastyczności potencjalne prawo plastycznego płynięcia (10, 21, 38, 43, 60). Podstawy plastyczności tych ośrodków o wzmocnieniu gęstościowym sformułował w literaturze polskiej Mróz (36). Hueckel (20) natomiast rozważył ośrodek rozdrobniony wykazujący sprzężenie odkształceń odwracalnych i nieodwracalnych. Przyjęcie takiego modelu pozwala wprowadzić dwojakiemu rodzajowi przyrosty odkształceń nieodwracalnych, a więc wynikające z plastycznego płynięcia oraz ze zmiany sprężystości ośrodka, spowodowanej plastycznym płynięciem.

W najprostszym przypadku modelu ciała sztywno-plastycznego ze wzmocnieniem gęstościowym stowarzyszone z warunkiem plastyczności prawo plastycznego płynięcia (41) dla osiowosymetrycznego stanu naprężenia wyraża się następująco:

$$\left. \begin{aligned} d\varepsilon_p &= \frac{\frac{\partial f}{\partial p} dp + \frac{\partial f}{\partial q} dq}{\left(-\frac{\partial f}{\partial \rho}\right)\rho \frac{\partial f}{\partial p}} \cdot \frac{\partial f}{\partial p}, \\ d\varepsilon_q &= \frac{\frac{\partial f}{\partial p} dp + \frac{\partial f}{\partial q} dq}{\left(-\frac{\partial f}{\partial \rho}\right)\rho \frac{\partial f}{\partial p}} \cdot \frac{\partial f}{\partial q}. \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

Zmianę gęstości ośrodka $d\rho$ określa prawo zachowania masy

$$d\rho = \rho d\varepsilon_p. \quad (65)$$

Powyższy model przedstawia wzmocnienie, osłabienie bądź nieograniczone plastyczne płynięcie w krytycznym stanie naprężenia. O wzmocnieniu bądź osłabieniu decyduje pochodna cząstkowa $\frac{\partial f}{\partial p}$ mogąca przybierać wartości zarówno dodatnie, jak i ujemne. Jeżeli $\frac{\partial f}{\partial p}$ jest dodatnie, to wobec żądanej dla procesu plastycznego dodatniej wartości Λ , a także mając z doświadczenia:

$$\frac{\partial f}{\partial \rho} < 0, \quad (66)$$

stwierdzamy, że

$$\frac{\partial f}{\partial p} dp + \frac{\partial f}{\partial q} dq > 0, \quad (67)$$

czyli wektor (dp, dq) tworzy kąt dodatni z normalną do warunku plastyczności. Zachodzi wtedy wzmocnienie materiału, powierzchnia plastyczności rozszerza się, a równania (64) przedstawiają jednoznaczny opis plastycznego płynięcia ośrodka, spełniającego postulat stateczności Druckera (37).

Dla przypadku

$$\frac{\partial f}{\partial p} = 0 \quad (68)$$

równania (64) tracą swą jednoznaczność. $d\epsilon_q$ zmierza do nieskończoności, a $d\epsilon_p$ jest nieokreślone. Z doświadczenia natomiast wiemy, że jest to przypadek idealnej plastyczności. Materiał płynie wtedy plastycznie przy stałej objętości, nie zachodzi więc ani wzmocnienie, ani osłabienie.

Trzeci z możliwych przypadków:

$$\frac{\partial f}{\partial p} < 0, \quad (69)$$

przedstawia proces osłabienia. Z zaproponowanego prawa plastycznego płynięcia wynika, że wtedy $d\epsilon_p < 0$ i wektor (dp, dq) jest skierowany do wewnątrz powierzchni plastyczności, a mimo to materiał płynie plastycznie, gdyż równocześnie kurczy się powierzchnia plastyczności ze względu na $d\phi < 0$. Jest to przypadek doświadczalnie stwierdzonego niekontrolowanego i niestatecznego plastycznego płynięcia.

Model plastyczności ze wzmocnieniem gęstościowym nie opisuje jednakowo poprawnie wszystkich procesów mechanicznych. Daje jednoznaczny opis procesu tylko dla dróg obciążenia, na których następuje zagęszczenie ośrodka. Uzasadnione jest wtedy przyjęcie stowarzyszonego prawą plastycznego płynięcia. Natomiast model ten nie opisuje ściśle przejścia ośrodka ze stanu statecznego w stan idealnego plastycznego płynięcia, jak również niejednoznacznie opisuje stany niestateczne.

Pewne rozszerzenie przedstawionego modelu plastyczności ze wzmocnieniem gęstościowym daje uzależnienie warunku plastyczności zarówno od odkształceń objętościowych, jak i postaciowych (doznaných uprzednio przez ośrodek). Nova (43) przyjął następującą postać warunku plastyczności:

$$f(p, q, p_u (\dot{\epsilon}^{pl}, \dot{\epsilon}^{pl})) = q + M_p (\ln \frac{p}{p_u} - 1) = 0, \quad (70)$$

gdzie p_u jest parametrem wzmocnienia zależnym od prędkości plastycznego

odkształcenia objętościowego ϵ^{pl} oraz postaciowego ϵ^{pl} . Warunek plastyczności (70), będący rozszerzeniem warunku (61) podanego przez Schofielda i Wrotha (50), pozwolił na otrzymanie bardziej realistycznych charakterystyk materiałowych uwzględniających zagęszczanie i rozluźnianie się struktury ośrodka w próbie ścinania przy stałym ciśnieniu hydrostatycznym. Podobnie Wilde (60) rozważa warunek plastyczności zależny od odkształceń postaciowych i objętościowych ośrodka. Autor ten przyjął bardzo prosty przypadek wzmocnienia:

$$G(\epsilon_{ii}^{pl}, N) = -\frac{K}{M} \epsilon_{ii}^{pl} - g(1 - e^{-\beta N}), \quad (71)$$

gdzie:

- ϵ_{ii}^{pl} - pierwszy niezmiennik tensora odkształcenia plastycznego;
- N - pierwiastek kwadratowy z drugiego niezmiennika dewiatora odkształcenia plastycznego;

K, M, g, β - stałe modelu.

Przyjęta wykładnicza zależność wzmocnienia od plastycznego odkształcenia postaciowego sprawia, że dla małych wartości odkształcenia stan naprężenia może znacznie przekraczać linię naprężeń krytycznych $q = M_p$ na płaszczyźnie p - q , zaś dla dużych wartości odkształcenia postaciowego maleje jego wpływ na wzmocnienie ośrodka i linia krytyczna $q = M_p$ oddziela stany stateczne od niestatecznych, jak w prostym modelu o wzmocnieniu gęstościowym. Uzależnienie warunku plastyczności od odkształceń postaciowych umożliwia opis niestatecznego odcinka krzywej naprężenie-odkształcenie (po przekroczeniu maksymalnej wytrzymałości), a także pozwala przewidzieć zagęszczenie i rozluźnienie się ośrodka podczas próby ścinania.

Podkreślić należy, że modele te pomijają całkowicie rzeczywiste procesy fizyczne występujące w poszczególnych cząstkach ośrodka oraz w miejscach ich wzajemnego styku, a uzyskaną zgodność z wieloma faktami doświadczalnymi zawdzięczają przyjęciu odpowiednich założeń.

MECHANIZMY ODKSZTAŁCEN PLASTYCZNYCH

Istnieje kilka teorii tłumaczących fizyczny mechanizm odkształcenia plastycznego i pozwalających w pewnym stopniu, głównie jakościowo, opisać zjawiska występujące podczas badania próbek o większych wymiarach. Przy odkształceniu sprężystym średnie położenie atomów i cząsteczek zostaje przywrócone po odciążeniu. Przy odkształceniu plastycznym zarówno kształt ciała, jak i objętość po odciążeniu nie wracają do pierwotnej postaci, to znaczy, że cząstki doznały nieodwracalnych względnych przemieszczeń i po odkształceniu plastycznym nie zajmują swoich pierwotnych średnich położenia.

Jeden z mechanizmów plastycznych odkształceń ciał krystalicznych tłumaczy wzrost oporu na odkształcenia plastyczne obrotem bloków poślizgu do położenia, przy którym wytrzymałość na ścinanie rośnie. Taki poślizg jednej warstwy atomów względem drugiej niewątpliwie ma miejsce nie tylko przy odkształceniach plastycznych, lecz także przy odkształceniach sprężystych. Równoczesny poślizg jednej warstwy atomów względem drugiej; konieczny dla nieodwracalnego odkształcenia plastycznego, wymagałby w idealnej siatce bardzo dużej siły rozciągającej, jaka w rzeczywistości nie jest potrzebna do plastycznego odkształcenia próbki. Odkształcenia postaciowe nie pojawiają się bowiem równocześnie wzdłuż całej warstwy atomów. Poślizg jest wynikiem złożonego procesu, który zachodzi w siatce krystalicznej każdego ziarna oraz w materii międzykrystalicznej (7,22).

Inny mechanizm poślizgu w materiale krystalicznym tłumaczony jest obecnością dyslokacji w siatce. W celu wyjaśnienia różnorodnych efektów odkształcenia plastycznego są budowane bardzo złożone modele dyslokacyjne, uwzględniające również wpływ obcych atomów na własności sieci krystalicznej. Dyslokacyjny model odkształceń plastycznych pozwala opisać jakościowo takie efekty, jak wpływ temperatury, prędkości odkształcenia oraz czasu. Na przykład w podwyższonej temperaturze drgania siatki krystalicznej ułatwiają przemieszczanie się dyslokacji (30).

Plastyczne odkształcenia są tłumaczone także procesami dyfuzji cząsteczek. Każda cząsteczka ciała stałego wykonuje drgania cieplne wokół położenia równowagi trwałej, czyli znajduje się w tzw. studni energetycznej

utworzonej przez sąsiednie cząsteczki. Zmiany cieplne mogą jednak dostarczyć cząsteczce energii wystarczającej do pokonania bariery potencjalnej i wówczas cząstka przechodzi w pewne położenie sąsiednie. W ten sposób cząstki mogą zamieniać się miejscami, co prowadzi do ich wymieszania się. Na skutek przypadkowości ruchów proces ten nie prowadzi do odkształcenia ciała. Jeśli natomiast w ciele istnieją jakieś naprężenia, to wysokość barier energetycznych maleje, szczególnie w kierunku działania maksymalnego naprężenia stycznego. W tym też kierunku cząstki mają szczególną łatwość przemieszczania się (4,7,19). Ośrodek sycki rozpatrywany jako układ losowo zorientowanych cząsteczek różnego kształtu i wielkości jest materiałem daleko bardziej złożonym i trudniejszym do ilościowego badania (w oparciu o elementarne mechanizmy odkształceń) niż materiał krystaliczny, jednakże i tu można zidentyfikować pewne grupy zjawisk fizycznych odpowiedzialnych za odwracalne i nieodwracalne odkształcenia.

Odształcenia ośrodka syckiego są wynikiem odkształceń poszczególnych jego elementów-cząstek oraz względnych przesunięć między nimi. Te dwa mechanizmy rzadko działają niezależnie od siebie. Losowy układ cząstek byłby niezmienny, gdyby cząstki były sztywne i nie ulegały deformacjom pod wpływem zewnętrznych sił. W rzeczywistości poszczególne elementy ośrodka są odkształcalne, skutkiem czego naruszona zostaje wewnętrzna równowaga sił, a więc powstają małe przesunięcia w układzie, co w efekcie daje duże odkształcenie całego ośrodka (29). Fizyczny sens pojawiania się nieodwracalnych odkształceń ośrodka można wyjaśnić rozpatrując układ sił działających na wybraną cząstkę. Ośrodek będzie się znajdował w równowadze, jeśli dla każdej jego cząstki wypadkowa działania wszystkich sił stycznych i normalnych (w punktach kontaktu) oraz ich moment względem dowolnego punktu będzie równy zeru, a także jeśli dla wszystkich punktów zetknięcia każdej cząstki z sąsiednimi siły styczne będą mniejsze od maksymalnej siły tarcia statycznego (61):

$$t < n_f,$$

(72)

gdzie:

t - siła styczna działająca w wybranym punkcie styku cząstek;

n - siła normalna;

f - współczynnik tarcia.

Podczas odkształceń sprężystych wyżej wymienione warunki nie zostają naruszone i cząstka ulega tylko sprężystej deformacji w punkcie kontaktu z sąsiednim elementem ośrodka. Jednakże w rzeczywistości deformacje w punktach styku nie są całkowicie odwracalne, a ponadto zazwyczaj prowadzą do naruszenia wymienionego warunku równowagi. Proces plastycznych deformacji ośrodka sypkiego składa się więc z szeregu mikroprocesów poślizgu, a każdy z tych procesów kończy się wówczas, kiedy nowe położenie cząstki i nowy układ sił doprowadzi do stanu równowagi. Odkształcenia powstałe w wyniku poślizgu cząstek lub ich uszkodzenia są w większości nieodwracalne. Dlatego też tylko część odkształcenia powstałego podczas zagęszczania ośrodka znika po usunięciu obciążenia. Odprężanie cząstek z chwilą odciążenia jest wywołane energią sprężystą nagromadzoną w poszczególnych ziarnach podczas obciążenia. Jednakże zmiany objętościowe podczas odciążania wynikają zarówno z rozprężania się poszczególnych ziaren, jak i z wymuszonych przez to zjawisko zmian w ich upakowaniu.

Wzrost sztywności ośrodka sypkiego (podczas badań edometrycznych), w miarę wzrostu obciążenia można tłumaczyć zaklinowywaniem się poszczególnych ziaren. W miarę wzrostu naprężenia następują przemieszczenia początkowo najluźniejszych szeregów cząstek, a następnie bardziej zagęszczonych. Każde takie przemieszczenie powoduje wzrost gęstości upakowania, tworząc coraz sztywniejszy układ ziaren. Przy jeszcze większych wartościach obciążenia następują nieodwracalne deformacje poszczególnych elementów ośrodka, co wywołuje dalsze poślizgi i dalsze zagęszczanie. Poślizgi między ziarnami tłumaczą również jakościowo zachowanie się ośrodka sypkiego podczas cyklicznych obciążeń w trakcie badań edometrycznych. Dla naprężeń mniejszych niż największe poprzednie ośrodek jest sztywniejszy podczas ponownego obciążania, ponieważ znaczna liczba poślizgów między ziarnami nastąpiła już w czasie pierwszego obciążenia. Kolejne następne cykle obciążenie-odciążenie tworzą prawie jednakowe pętle histerezy. Podczas każdego takiego cyklu energia tracona jest na poślizgi między ziarnami, powodowane przez zewnętrzne obciążenie bądź przez sprężyste rozprężanie się poszczególnych ziaren. Lambe (29) przed-

stawia jakościowy opis tych zjawisk analizując za Millerem (34) wzajemne przemieszczenia idealnego układu kul sprężystych. Podczas obciążania sprężyste kule uginają się, następują równoczesne wzajemne ich przemieszczenia związane nieodłącznie z dysypacją energii. Odprężaniu kul towarzyszą poślizgi w kierunkach przeciwnych, co znów powoduje pewną dysypację nagromadzonej energii odkształcenia sprężystego. Ponieważ kierunek sił tarcia w stykach między kulami zmienia się na przeciwny (gdy przechodzimy od obciążenia do odciążenia), dlatego też dla danej wartości naprężeń pionowych podczas badań edometrycznych naprężenia poziome będą większe podczas odciążania niż podczas obciążania początkowego. Za pomocą układu kul sprężystych można również wytłumaczyć zachowanie się ośrodka podczas badań trójosiowych, a nawet w pewnym stopniu przyrost objętości po osiągnięciu maksimum wytrzymałości dla materiału wstępnie silnie zagęszczonego.

Chociaż modele takie wyjaśniają wyniki badań, to jednak są one zbyt dużym uproszczeniem rzeczywistych procesów i mają tylko wartość poglądową. Przesunięcia cząstek rzeczywistego ośrodka są zbyt złożone, aby można je było rozpatrywać na tak prostym modelu. W każdej chwili przebiegającego procesu odkształceń różne czynniki wpływają na zachowanie się poszczególnych ziaren i całych ich układów. Szczególnie opis procesów w ośrodku sypkim pochodzenia roślinnego (np. ziarno zbóż) nie daje się tak prosto ująć przez przybliżenie idealnym układem kul, których odkształceniami rządzi teoria Hertza. Teoria ta, pozwalająca wyznaczyć związek między całkowitym naprężeniem i odkształceniem, jak również pole naprężeń wokół miejsca styku ciał, wymaga poczynienia wielu upraszczających założeń. Dotyczą one jednorodności stykających się cząstek, sprężystego zakresu odkształceń, pomijalności tarcia na styku ciał, a także wielkości pola powierzchni tego styku w stosunku do promienia krzywizny ciała. Większość z tych założeń nigdy nie jest spełniona w przypadku materiałów biologicznych, których właściwości fizyczne ulegają ponadto ciągłej zmianie w czasie (2,16,17,35).

Osobny problem stanowią siły spójności powstające w materiałach rozdrobionych. Siły te, przeciwdziałające wzajemnym przesunięciom cząstek, objawiają się szczególnie wyraźnie przy wzroście wilgotności materiału

oraz przy zwiększonym zagęszczeniu. Tłumaczyć to możemy zaklinowywaniem się poszczególnych ziaren przy wzroście gęstości oraz powstawaniem wiązań adhezyjnych w miejscach ich styku. Wiązania te są wynikiem działania różnego rodzaju sił, napięć powierzchniowych oraz warstw adsorbujących w ośrodku nawilgoconym. Wszystkie te siły rosną w miarę zwiększania powierzchni kontaktu oraz nacisku między ziarnami i na odwrót wiązania te ulegają stopniowemu zniszczeniu podczas ścinania, a spójność materiału maleje. W ogólnym przypadku część sił spójności powstaje jednocześnie z przyłożeniem obciążenia, zaś część rozwija się w miarę upływu czasu. Siły te zależą ponadto w istotny sposób od wilgotności i temperatury ośrodka.

ZAKOŃCZENIE

Przedstawione problemy mechaniki ośrodków sypkich pochodzenia roślinnego nie wyczerpują z pewnością wszystkich zagadnień towarzyszących wielu procesom, jakie zachodzą w czasie składowania czy transportu określonych płodów rolnych. Jednakże charakteryzują dotychczasowy stan wiedzy na ten temat i mogą być przedmiotem dalszych dyskusji, poprzedzających nowe poglądy i inspirujących naukowo. Nie ulega bowiem wątpliwości, że tylko poprzez dokładne poznanie cech fizycznych materiałów roślinnych i ich zmienności w czasie można w efekcie uzyskać wystarczające dane do pełnej charakterystyki tego typu ośrodków. Stąd też niezbędne są - zapoczątkowane już - badania cech mechanicznych pojedynczych cząstek ośrodka (np. ziarniaków zbóż), jako elementarnych składowych do poznania praw rządzących zmiennością całego ośrodka w czasie różnych procesów technologicznych. Zagadnienia te wiążą się ściśle z reakcją pojedynczych cząstek na różnego rodzaju oddziaływania sił zewnętrznych z uwzględnieniem biologicznego stanu materiału oraz czasu działania sił. Wiadomo na przykład, że ziarna zbóż w zależności od wilgotności mogą przyjmować postać ciała sztywno-kruchego (bardzo suche), poprzez prawie sprężyste ciało Hooke'a do lepko-sprężystego, a nawet plastycznego w przypadku dużej wilgotności. W normalnych warunkach przechowywania ziarna zbóż, jak i inne produkty rolne uważane są za ciała lepko-sprężyste. Trafne wydaje się porównanie

między technicznym materiałem lepko-sprężystym, w którym istotną rolę odgrywa temperatura, a biologicznym materiałem lepko-sprężystym, gdzie analogiczną rolę odgrywa wilgotność. Z drugiej strony przedstawione modele plastycznego płynięcia zaniedbują całkowicie efekty reologiczne materiału, traktując ośrodek jako idealnie sypki. Takie założenie można przyjąć tylko w odniesieniu do ziarna bardzo suchego, tymczasem w praktyce często zachodzi potrzeba magazynowania ziarna o podwyższonej wilgotności. Wtedy proponowane modele plastyczności przestają być wystarczająco dokładne, gdyż efekty czasowe mogą być nie do pominięcia w przypadku znacznych prędkości odkształceń. Również proces pełzania materiału pod wpływem własnego ciężaru może prowadzić do znacznego zagęszczenia ośrodka. Widać więc, że zapożyczenie matematycznych modeli ośrodków technicznych (piasek, żwir) do ośrodków pochodzenia roślinnego wiąże się z koniecznością bardzo dokładnego określenia zakresu ich stosowalności. Z kolei rozważania mechaniki ośrodków sypkich i rozdrobnionych, zmierzające do ustalenia podstawowych mechanizmów odkształceń i przemieszczeń poszczególnych ziaren, nie wyszły poza jakościowy opis procesów. Wydaje się jednak, że ustalanie praw ruchu ośrodka poprzez analizę elementarnych oddziaływań między jego cząstkami może wydatnie przyczynić się do zrozumienia rzeczywistych procesów zachodzących w tak złożonym ośrodku.

Na podstawie przedstawionych sformułowań i rozważań wielu autorów można wyraźnie odgraniczyć dwa nurty badań. Pierwszy jest skupiony wokół praktycznych zagadnień przechowalnictwa i poszukuje najprostszych modeli ośrodka, dających jednak efektywne rozwiązania w zastosowaniu do warunków narzuconych przez praktykę. Drugi nurt to badania podstawowe zainteresowane bardziej samym ośrodkiem i metodami opisu jego złożonego zachowania się niż praktycznymi problemami składowania czy transportu. Stąd też wypływa konieczność kontynuowania badań podstawowych rzeczywistych ośrodków pochodzenia roślinnego, a więc rozwiązywania tych złożonych i trudnych problemów w znacznie szerszym niż dotychczas ujęciu interdyscyplinarnym.

PIŚMIENNICTWO

1. Becker M., Lippmann H.: Plane Plastic Flow of Granular Model Material: Experimental Setup and Results, Arch. Mech. Stos., 1977, 29 (6), 829-846.
2. Bojanowski W., Jeske T.: Powierzchnia poślizgu i charakterystyki plastycznego pola naprężeń przy wciskaniu płaskiego stempla w pół-nieskończony ośrodek sypki - badania doświadczalne, Arch. Inż. Łąd., 1963, IX, 247-262.
3. Byszewski W., Haman J.: Gleba - maszyna - roślina, PWN, Warszawa 1977.
4. ChoKyun Rha (ed.): Theory, Determination and Control of Physical Properties of Food Materials, vol. 1, Series in Food Material Science, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland, 1975.
5. Clower R.E., Ross I.J., White G.M.: Properties of Compressible Granular Materials as Related to Forces in Bulk Storage Structures, Trans. ASAE, 1973, 16(3), 478-481.
6. Collins R.E.: Determination of Pressures in Cylindrical Storage Structures, Trans. ASAE, 1963, 6(2), 98-101, 103.
7. Cottrell A.H.: Własności mechaniczne materii, PWN, Warszawa 1970.
8. Drescher A.: O pewnych rozwiązaniach kinematycznych płaskiego płynięcia ośrodków rozdrobnionych, Prace IPPT PAN, 1972, 31.
9. Drescher A.: Zagadnienia doświadczalnej weryfikacji modelu ciała rozdrobnionego o wzmocnieniu gęstościowym, Rozpr. Inż., 1972, 20, 351-387.
10. Drescher A.: Badanie mechanizmów plastycznego płynięcia materiałów ziarnistych, Prace IPPT PAN, 1975.
11. Drucker D.C.: A Definition of Stable Inelastic Material, J. Appl. Mech., 1959, 26, 101-106.
12. Feda J.: Volume Changes of Sand in Triaxial Tests, Proc. of the Second Seminar on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Łódź, 1970, 107-123.
13. Fung Y.C.: Podstawy mechaniki ciała stałego, PWN, Warszawa 1969.
14. Glazer Z.: Mechanika gruntów, Wyd. Geol., Warszawa 1977.

15. Grochowicz J.: Maszyny do czyszczenia i sortowania nasion, PWRiL, Warszawa 1971.
16. Haman J., Zdanowicz A.: O potrzebie rozszerzenia studiów nad reologią materiałów w rolnictwie, Roczn. Nauk Roln., 1968, 68-C-2, 195-217.
17. Haman J.: Rheological Properties of Cereals and their Theoretical Interpretation, Trans. of the International Conference in Lublin, Zesz. Probl. Post. Nauk Roln., 1978, 203, 107-121.
18. Hill R.: The Mathematical Theory of Plasticity, Oxford 1950.
19. Huber M.T.: Teoria plastyczności, PWN, Warszawa 1954.
20. Hueckel T., Drescher A.: Nieliniowy opis deformacji sprężysto-plastycznych ciał rozdrobnionych, Prace IPPT PAN, 1972, 65.
21. Hueckel T.: Identyfikacja modelu materiału ziarnistego o wzmocnieniu gęstościowym w zakresie zagęszczania, Arch. Hydrot., 1978, XXV (3), 373-392.
22. Iljuszyn A.A., Lenski W.S.: Wytrzymałość materiałów, PWN, Warszawa 1963.
23. Isaacson I.D., Boyd J.S.: Mathematical Analysis of Lateral Pressures in Flat-Bottomed Deep Grains Bins, Trans. ASAE, 1965, 8 (3), 358-360.
24. Izbicki R.J., Mróz Z.: Metody nośności granicznej w mechanice gruntów i skał, PWN, Warszawa 1976.
25. Jenike A.W., Shield R.T.: On the Plastic Flow of Coulomb Solids Beyond Original Failure, J. Appl. Mech., 1959, 27, 599-602.
26. Jenike A.W.: Storage and Flow of Solids, Arch. Inż. Łąd., 1966, 12 (4), 439-451.
27. Kjølgaard W.L., Ashcroft D.A., Glahm R.J., Stewart W.O., Stone R.E., Yarn-Mo Yang: Compression and other Properties of Chopped Forages, Pennsylvania Agricultural Experiment Station Bulletin, 807, 5-36.
28. Lai F.S., Fan L.T.: Excessive Pressure Drop Through a Bed of Stored Grain During Aeration, J. Agric. Eng. Res., 1976, 21 (2), 207-209.
29. Lambe T.W., Whitman R.V.: Mechanika gruntów, t. I, Arkady Warszawa 1977.

30. Landau L., Lifszic E.: *Mechanika ośrodków ciągłych*, PWN, Warszawa 1967.
31. Lityński M.: *Biologiczne podstawy nasiennictwa*, PWN, Warszawa 1977.
32. Loewer Jr., Ross I.J., Kratzer D.D., Walker J.N.: Properties of Ground Shelled Corn as Related to Forces in Bulk Storage Structures, *Trans. ASAE*, 1977, 20 (1), 155-156.
33. McNulty P.B. Mohsenin N.N.: Compaction Behavior of Bulk Whole Corn Kernels at Pressures up to $34,6 \text{ MN/m}^2$, *J. Food Process Engineering*, 1977, 1(1), 75-96.
34. Miller E.T.: Stresses and Strains in on Array of Elastic Spheres, Report R 53-39, M.I.T. Department of Civil Engineering, 1963.
35. Mohsenin N.N.: *Physical Properties of Plant and Animal Materials*, vol. I, Structure, Physical Characteristics and Mechanical Properties, Gordon and Breach Science Publishers, New York 1970.
36. Mohsenin N.N., Zaske J.: Stress Relaxation and Energy Requirement in Compaction of Unconsolidated Materials, *J. Agric. Eng. Res.*, 1976, 21 (2), 193-205.
37. Mróz Z., Szymański Cz.: Uproszczona teoria przepływu ośrodków rozdrobionych w zbieżnych kanałach, *Prace IPPT PAN*, 1970, 50.
38. Mróz Z., Kwaszczyńska K.: Pewne problemy brzegowe dla ciał rozdrobionych o wzmocnieniu gęstościowym, *Rozpr. Inż.*, 1971, 19 (1), 15-42.
39. Mróz Z., Szymański Cz.: Gravity Flow of a Granular Material in a Converging Channel, *Arch. Mech. Stos.*, 1971, 23 (6), 897-917.
40. Mróz Z., Drescher A.: *Podstawy teorii plastyczności ośrodków rozdrobionych*, Ossolineum, Wrocław, 1972.
41. Naghdi P.M., Murch S.A.: On the Mechanical Behaviour of Viscoelastic Plastic Solids, *J. Appl. Mech.*, 1963, 30, 321-328.
42. Nielsen J.: Model Laws for Granular Media and Powders with a Special View to Silo Models, *Arch. Mech. Stos.*, 1977, 29 (4), 547-560.
43. Nova R.: On the Hardening of Soils, *Arch. Mech. Stos.*, 1977, 29 (3), 445-458.

44. Olchowski I.: Mechanika teoretyczna, PWN, Warszawa 1978.
45. Olszak W.: O założeniach teorii ośrodków sypkich i spoistych niejednorodnych, Arch. Mech. Stos., 1955, 7, 132-150.
46. Olszak W., Życzkowski M.: Podstawy teorii sprężystości ciał fizycznie nieliniowych, Arch. Mech. Stos., 1955, 7, 151-168.
47. Olszak W. i inni: Teoria plastyczności, PWN, Warszawa 1965.
48. Perzyna P.: Teoria lepkoplastyczności, PWN, Warszawa 1966.
49. Praca zbiorowa: Magazynowanie ziarna zbóż nasion strączkowych i oleistych, WNT, Warszawa 1975.
50. Schofield A., Wroth P.: Critical State Soil Mechanics, McGraw-Hill, New York - London 1968.
51. Schwedes J.: Fliessverhalten von Schüttgütern in Bunkern, Verlag Chemie, 1970.
52. Stephens L.E., Foster G.H.: Grain Bulk Properties as Affected by Mechanical Grain Spreaders, Trans. ASAE, 1976, 19 (2), 354-358, 363.
53. Stephens L.E., Foster G.H.: Bulk Properties of Wheat and Grain Sorghum as Affected by a Mechanical Grain Spreader, Trans. ASAE, 1978, 21 (6), 1217-1218, 1221.
54. Szabó B.: Stress State in Grain in Layer, Trans. of the International Conference in Lublin, Zesz. Probl. Post. Nauk Roln., 1978, 203, 349-356.
55. Szczepiński W., Winek H.: Doświadczalne studium kinematyki ośrodków sypkich dla pewnych problemów brzegowych, Rozpr. Inż., 1972, 20, 103-114.
56. Szczepiński W.: Stany graniczne i kinematyka ośrodków sypkich, PWN, Warszawa 1974.
57. Tomczyk S.: Magazyny ziarna i innych nasion, PWRiL, Warszawa 1970.
58. Timoshenko S., Goodier J.N.: Teoria sprężystości, Arkady, Warszawa 1962.
59. Uzarowicz L., Woroch S.: Maszyny i urządzenia młyńskie, Wyd. Szkolne i Pedagog., Warszawa 1977.

60. Wilde P.: Two Invariants-dependent Models of Granular Media, Arch. Mech. Stos., 1977, 29(6), 799-809.
61. Zenkow P.Ł.: Miechanika nasypnych gruzow, Izd. Maszynostrojenie Moskwa 1964.

SPIS TREŚCI

Wstęp	3
Zagadnienia składowania i transportu ośrodków sypkich pochodzenia roślinnego	4
Teoria plastycznego płynięcia	15
Tensor odkształcenia i naprężenia	16
Podstawowe typy badań laboratoryjnych próbek materiałów sypkich	23
Kryteria wytrzymałości - idealna plastyczność	28
Plastyczne płynięcie materiałów statecznych	33
Model ośrodka sypkiego o wzmocnieniu gęstościowym	41
Mechanizmy odkształceń plastycznych	49
Zakończenie	53
Piśmiennictwo	55