

P O L S K A A K A D E M I A N A U K
ZAKŁAD AGROFIZYKI

PROBLEMY AGROFIZYKI 48

JÓZEF HORABIK

OPIS POCZĄTKOWEJ FAZY GRAWITACYJNEGO WYPLÝWU ROŚLINNEGO OŚRODKA ZIARNISTEGO ZE ZBIORNIKA

WROCLAW · WARSZAWA · KRAKÓW · GDAŃSK · ŁÓDŹ
ZAKŁAD NARODOWY IMIENIA OSSOLIŃSKICH
WYDAWNICTWO POLSKIEJ AKADEMII NAUK

1985

Komitet redakcyjny

prof. dr JAN GLIŃSKI (redaktor naczelny)

prof. dr IGNACY DECHNIK, prof. dr BOGUSŁAW SZOT

Okladkę projektował Zygmunt Ziemka

Redaktor Wydawnictwa Hanna Jurek

Redaktor techniczny Elżbieta Garnarczyk

© Copyright by Zakład Narodowy im. Ossolińskich — Wydawnictwo, Wrocław 1985
Printed in Poland

PL ISSN 0137-6586

ISBN 83-04-02200-1

Zakład Narodowy im. Ossolińskich — Wydawnictwo, Wrocław 1986.
Nakład: 400 egz. Objętość: ark. wyd. 5,90; ark. druk. 7,75. Papier
offsetowy kl. V, 70 g. 61 x 86. Oddano do druku 1986. 01. 06. Druk
ukończono w lutym 1986. Wrocławska Drukarnia Naukowa. Zam.

2005/86 — R-12, Cena zł 90.—

SPIS TREŚCI

Wykaz symboli	5
Wstęp	9
Przegląd literatury	10
Praktyczne problemy magazynowania materiałów ziarnistych w zbiornikach	10
Właściwości mechaniczne ośrodków ziarnistych	14
Model ośrodka ziarnistego o wzmocnieniu gęstościowym	16
Warunek plastyczności Coulomba-Mohra	18
Stan naprężenia w zbiorniku	19
Eksperymentalne badania kinematyki początkowej fazy wypływu ośrodka ze zbiornika	22
Fala rozluźnienia w ośrodku ziarnistym	24
Cel badań i hipotezy robocze	30
Proponowany model opisu przebiegu procesu wypływu	32
Propagacja fali prędkości w kanale klinowym	33
Zależności ogólne oraz przyjęte założenia	33
Równanie ruchu ośrodka	38
Stała prędkość propagacji fali rozluźnienia	42
Stała wartość rozluźnienia na froncie fali	46
Propagacja fali prędkości w kanale stożkowym	49
Równanie ruchu ośrodka	49
Stała prędkość propagacji fali rozluźnienia	52
Stała wartość rozluźnienia na froncie fali	54
Propagacja fali w zbiorniku stożkowo-cylindrycznym	55
Przykłady rozwiązań numerycznych i dyskusja o wynikach	60
Kanal klinowy	61

Stała prędkość propagacji fali rozluźnienia	61
Stała wartość rozluźnienia na froncie fali	75
Kanał stożkowy	78
Stała prędkość propagacji fali rozluźnienia	78
Stała wartość rozluźnienia na froncie fali	85
Badania doświadczalne	86
Pomiary parametrów mechanicznych ośrodków ziarnistych	87
Stanowisko pomiarowe oraz metodyka pomiaru prędkości propa- gacji fali rozluźnienia w ośrodku ziarnistym	92
Program badań prędkości fali rozluźnienia oraz wyniki pomiarów	94
Porównanie doświadczalnej i teoretycznej wartości wpływu ośrodka	102
Podsumowanie	109
Wnioski	112
Literatura	113

Wykaz symboli

- $\Lambda(t)$ - amplituda fali $[ms^{-2}]$
- $a_r(\xi, \tau)$ - bezwymiarowe przyspieszenie cząstek ośrodka w zbieżnej części zbiornika
- $a_x(\tau)$ - bezwymiarowe przyspieszenie cząstek ośrodka w cylindrycznej części zbiornika
- b_o - promień wodzący odpowiadający wylotowi zbiornika $[m]$
- b - promień wodzący odpowiadający maksymalnej wysokości części zbieżnej zbiornika $[m]$
- C - stała całkowania
- c - spójność ośrodka $[Pa]$
- d - szerokość otworu wylotowego $[m]$
- $\frac{d}{dt}$ - pochodna zupełna
- $\frac{\partial}{\partial t}$ - pochodna czasowa
- $\frac{\partial}{\partial x}$ - pochodna przestrzenna
- F - bezwymiarowa wypadkowa siła działająca na elementarną warstwę ośrodka
- $f(x, t)$ - dowolna funkcja zmiennych x i t
- g - przyspieszenie ziemskie $[ms^{-2}]$
- k - stała Janssena
- M^* - stała materiałowa - stosunek naprężenia stycznego σ_t działającego na ścianę zbiornika do średniego naprężenia normalnego $\bar{\sigma}_r$ w biernym stanie naprężenia
- M^{**} - stała materiałowa - stosunek naprężenia stycznego σ_t działającego na ścianę zbiornika do naprężenia normalnego σ_r w czynnym stanie naprężenia

- m^* - stała materiałowa (zależna od stałej M^*)
 m^{**} - stała materiałowa (zależna od stałej M^{**})
 P - porowatość ośrodka [%]
 p - ciśnienie hydrostatyczne [Pa]
 Q - bezwymiarowy wydatek wypływu
 q - podwojona wartość maksymalnego naprężenia ścinającego [Pa]
 R - bezwymiarowy promień części cylindrycznej zbiornika
 r - promień wodzący [m]
 $\bar{r}$ - promień wodzący frontu fali rozluźnienia [m]
 (r, θ, z) - walcowy układ współrzędnych przestrzennych
 (r, θ, φ) - sferyczny układ współrzędnych przestrzennych
 S_n - bezwymiarowe naprężenie normalne do ściany zbiornika
 S_r - bezwymiarowe naprężenie normalne w kierunku promieniowym
 $\bar{S}_r$ - wartość średnia bezwymiarowego naprężenia S_r
 S_t - bezwymiarowe naprężenie styczne działające na ściany zbiornika
 S_x - bezwymiarowe naprężenie normalne w kierunku pionowym
 t - czas [s]
 U - prędkość propagacji frontu fali rozluźnienia [ms^{-1}]
 $\bar{U}$ - bezwymiarowa prędkość propagacji frontu fali rozluźnienia
 $u(x, t)$ - przemieszczenie cząstek ośrodka [m]
 v - prędkość cząstek ośrodka [ms^{-1}]
 V_r - bezwymiarowa prędkość cząstek ośrodka w kierunku promieniowym w zbieżnym kanale
 V_x - bezwymiarowa prędkość cząstek ośrodka w kierunku pionowym w cylindrycznym kanale
 $VAR.$ - bezwymiarowa początkowa grubość warstwy ośrodka rozpoczynającego ruch w chwili $\tau = 0$
 w - wilgotność [%]
 W - wypływ - objętość ośrodka wypływającego ze zbiornika w określonym czasie [m^3]
 X_0 - maksymalna wysokość ośrodka w cylindrycznej części zbiornika [m]
 x - współrzędna wysokości w cylindrycznej części zbiornika

$Y(t)$	- położenie frontu fali w chwili t [m]
α	- kąt nachylenia płaszczyzny poślizgu względem kierunku mniejszego naprężenia głównego σ_3 [°]
δ	- kąt tarcia wewnętrznego [°]
ε	- odkształcenie
$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$	- odkształcenia główne
ε_q	- odkształcenie postaciowe
ε_v	- odkształcenie objętościowe
θ	- kąt biegunowy [°]
θ_w	- kąt nachylenia ścian bocznych względem płaszczyzny lub osi symetrii zbiornika [°] - na ilustracjach [rad] - w obliczeniach numerycznych
μ	- współczynnik tarcia ośrodka o ściany zbiornika
ν	- kąt tarcia ośrodka o ściany zbiornika [°]
ξ	- bezwymiarowy promień wodzący punktu w walcowym lub sferycznym układzie współrzędnych przestrzennych
ξ_o	- bezwymiarowy promień wodzący odpowiadający poziomowi wylotu zbiornika
$\bar{\xi}$	- bezwymiarowy promień wodzący frontu fali rozluźnienia
ρ	- aktualna gęstość ośrodka [kgm ⁻³]
ρ_o	- początkowa gęstość ośrodka [kgm ⁻³]
σ	- naprężenie [Pa]
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	- naprężenia główne [Pa]
σ_n	- naprężenie normalne do ściany zbiornika [Pa]
σ_r	- naprężenie normalne w kierunku promieniowym [Pa]
$\bar{\sigma}_r$	- wartość średnia naprężenia σ_r
σ_θ	- naprężenie normalne obwodowe [Pa]
σ_t	- naprężenie styczne [Pa]
τ	- czas w jednostkach bezwymiarowych
λ	- bezwymiarowa współrzędna wysokości w cylindrycznej części zbiornika
λ_o	- bezwymiarowa maksymalna wysokość ośrodka w cylindry- cznej części zbiornika
$\bar{\lambda}$	- bezwymiarowa współrzędna położenia frontu fali rozluźnie- nia w cylindrycznej części zbiornika

$[\]$ - skok nieciągłości funkcji na froncie fali np. $[f]$ - oznacza skok nieciągłości funkcji f , który jest równy różnicy granicznych wartości funkcji f bezpośrednio za frontem fali f^- oraz bezpośrednio przed frontem fali f^+ czyli $[f] = f^- - f^+$.

WSTĘP

We współcześnie stosowanych technologiach obróbki i przetwórstwa materiały ziarniste pochodzenia roślinnego podlegają wielokrotnym operacjom transportu, magazynowania bądź grawitacyjnego wypływu ze zbiorników. W celu zapewnienia prawidłowego funkcjonowania pracujących urządzeń niezbędna jest dokładna znajomość procesów mechanicznych zachodzących w obrabianym materiale. Z punktu widzenia mechaniki tych ośrodków wszelkie procesy przepływu są w większości procesami dynamicznymi i niestalonymi w czasie. Komplikuje to znacznie możliwość ich opisu ze względu na konieczność uwzględnienia wielu stałych materiałowych oraz zmiennych funkcji współrzędnych przestrzennych i czasu niezbędnych do matematycznie poprawnego ujęcia zjawiska. Złożoność cech mechanicznych ośrodka sypkiego, a zwłaszcza ośrodka ziarnistego pochodzenia roślinnego o wyraźnych własnościach reologicznych, stanowi szczególne utrudnienie. Ścisłe rozwiązanie zagadnienia z punktu widzenia mechaniki ośrodków ciągłych nie zostało dotąd opracowane dla rzeczywistych procesów ze względu na niedokładność istniejących modeli ośrodka oraz olbrzymie trudności rachunkowe pojawiające się przy zastosowaniu tych modeli do konkretnych warunków brzegowych.

Wiele elementów rzeczywistych procesów zachodzących w ośrodkach ziarnistych podczas poszczególnych operacji technologicznych pozostało nadal niewyjaśnionych. Jednym z takich procesów jest początkowa faza wypływu ośrodka ziarnistego ze zbiornika. Z obserwacji prowadzonych przez wielu badaczy wynika, że w tej fazie procesu zachodzi bardzo szybka zmiana rozkładu naprężeń w zbiorniku, której towarzyszy przejście ośrodka z fazy spoczynku do fazy wypływu. Ten proces zmiany

stanu ośrodka nie odbywa się równocześnie w całym zbiorniku, lecz począwszy od wylotu zbiornika obejmuje swym zasięgiem kolejno coraz wyżej położone warstwy ośrodka. Ścisły matematyczny opis takiego procesu byłby zatem bardzo utrudniony ze względu na nieustalony charakter zjawiska oraz zmienny w czasie obszar ruchu ośrodka. Dlatego też każda próba efektywnego matematycznego rozwiązania tego zagadnienia łączyć się musi z koniecznością poczynienia pewnych upraszczających założeń. Wyboru tych założeń należy dokonywać bardzo rozważnie, gdyż z jednej strony dążyć należy do tego, aby uproszczony model zjawiska ujmował najistotniejsze elementy rzeczywistego procesu, z drugiej zaś przyjęte założenia nie mogą stwarzać komplikacji matematycznych uniemożliwiających rozwiązanie.

W niniejszej pracy podjęto taką właśnie próbę sformułowania uproszczonego matematycznego opisu początkowej fazy wypływu ośrodka ziarnistego ze zbiornika. Otrzymane rozwiązania modelowe porównano następnie z wynikami badań doświadczalnych.

PRZEGLĄD LITERATURY

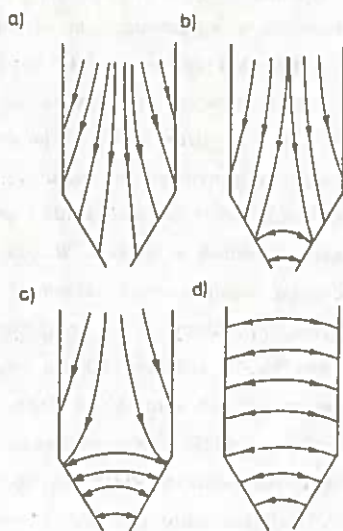
Praktyczne problemy magazynowania materiałów ziarnistych w zbiornikach

Z praktycznego punktu widzenia zbiorniki materiałów ziarnistych powinny spełniać dwa podstawowe wymagania: zapewniać prawidłowy przepływ gromadzonych w nich materiałów oraz stanowić konstrukcje bezpieczne, tzn. wytrzymałość komór powinna odpowiednio przewyższać wartość naprężeń powstających w wyniku oddziaływań składowanego materiału. Prawidłowe rozwiązanie tych zadań wymaga dokładnej znajomości zjawisk mechanicznych zachodzących w ośrodku rozdrobnionym wskutek oddziaływania z konstrukcją zbiornika w poszczególnych fazach operacji technologicznych: tj. podczas napełniania, składowania oraz opróżniania zbiornika. Analiza taka powinna dostarczać informacji o rozkładzie naprężeń oraz prędkości cząstek ośrodka, a także powinna umożliwiać przewidywa-

nie wielkości wydatku wypływu materiału podczas opróżniania zbiornika /81/. Drugim nie mniej ważnym źródłem informacji niezbędnych do prawidłowego funkcjonowania zbiorników jest laboratoryjne badanie właściwości mechanicznych poszczególnych materiałów ziarnistych.

Pierwszą operacją technologiczną związaną z przechowywaniem materiałów ziarnistych w zbiornikach jest faza napelniania. W tej fazie naprężenia panujące w materiale ziarnistym wywołane są ciężarem własnym materiału już zalegającego w zbiorniku oraz utratą energii kinetycznej swobodnie spadających ziaren. Doświadczenia wskazują, że w fazie napelniania naprężenia panujące w ośrodku ziarnistym są większe w kierunku pionowym, a mniejsze w poziomym /64,74/. Układ trajektorii większych ściskających naprężeń głównych przybiera kształt przedstawiony na rysunku 1a.

W przypadku magazynowania ziarna zbóż oraz innych surowców i produktów rolniczych już faza napelniania zbiornika stwarza wiele problemów związanych ze zjawiskiem samosortowania się ziarna. Spadające z dużej wysokości ziarna sortują się na skutek różnego oporu powietrza stawianego cząstkom o różnej wielkości i kształcie. W wyniku tego cząstki najcięższe, a więc dorodne ziarna i ciężkie zanieczyszczenia spadają najszybciej i gromadzą się w środku zbiornika. Ziarna i zanieczyszczenia lżejsze natrafiając na opór powietrza opadają wolniej i stuczają się na boki po powierzchni stożka utworzonego z ziaren ciężkich. Zanieczyszczenia o dużej powierzchni właściwej spadają najwolniej i zostają zepchnięte do ścian komory. W wyniku tego zawar-



Rys. 1. Trajektorie większego naprężenia głównego w zbiorniku w fazie: a) magazynowania, b) i c) początku wypływu, d) zaawansowanego wypływu /17/

tość zbiornika staje się niejednolita, tworzą się strefy o podwyższonej ilości zanieczyszczeń, które z reguły mają wyższą wilgotność. Zjawisko to jest niepożądane również z tego powodu, że w miejscach nagromadzenia się zanieczyszczeń i pyłu łatwo powstają ogniska samozagrzewania, powodujące zmniejszenie sytkości i prowadzące w efekcie do zlegania. Szczególnie sprzyja temu napełnianie zbiorników ziarnem bezpośrednio z kombajnów lub bez wstępnego oczyszczania i w stanie podwyższonej wilgotności. Zagrożenie to potęguje fakt, że w przechowywanym materiale biologicznym zachodzą stale różne przemiany fizyczne, fizykochemiczne i biologiczne /38,58,68,75/. Ujemnym skutkiem samosortowania ziarna podczas napełniania zbiorników zapobiega instalowanie przy wlocie komory specjalnych urządzeń, które rozrzucają ziarno równomiernie po całym przekroju zbiornika /69/.

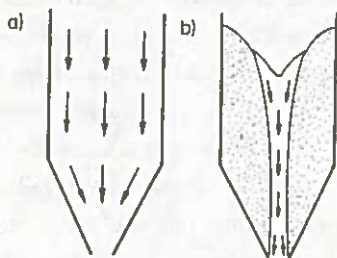
Kolejny etap to faza magazynowania materiału w zbiorniku. Stan naprężenia w zgromadzonym ośrodku jest wtedy analogiczny do tego, jaki wytworzył się w trakcie napełniania zbiornika, tj. naprężenia w kierunku pionowym są większe od naprężeń w kierunku poziomym /1, 28,74,76,77/. Stan naprężenia może ulec zmianie w przypadku długotrwałego magazynowania materiału w zbiorniku. Istotna jest wtedy znajomość wielkości zagęszczenia, jakiemu ulegnie ośrodek pod wpływem rozkładu ciśnień w masie. W przypadku materiałów roślinnych wielkość tego zagęszczenia zależy w istotny sposób od wilgotności ziaren /66,67/. Przy dużej wilgotności dostrzegalne jest pełzanie takiego ośrodka, a zatem wielkość zagęszczenia wywołana ciężarem ziaren zależy w sposób istotny od czasu magazynowania /25,60/. Ma to bezpośredni związek z porowatością usypanego ziarna, decydującej o możliwości nasycenia powietrzem, co z kolei wpływa na własności ziarna /58/. Zagęszczenie ośrodka powoduje równocześnie wzrost powierzchni kontaktu między poszczególnymi ziarnami, co przy zwiększonej wilgotności ziarna wytwarza znaczne siły wiązań powierzchniowych. Również wzajemne zaklinowywanie się ziaren zwiększa wytrzymałość takiego ośrodka na ścinanie komplikując proces grawitacyjnego opróżniania zbiorników.

Zasadniczej zmianie ulega stan naprężenia i deformacji ośrodka w fazie opróżniania. W momencie otwarcia wylotu zbiornika następuje

szybka redystrybucja stanu naprężenia. Redystrybucja naprężenia nie zachodzi jednak równocześnie w całej objętości ośrodka, lecz od dołu zbiornika ku górze propaguje się pewna bariera oddzielająca stan odpowiadający jeszcze fazie magazynowania od nowego stanu odpowiadającego wypływowi. Poniżej tej granicy naprężenia pionowe gwałtownie maleją osiągając wartości mniejsze od naprężeń poziomych /17,78,79/. Układ trajektorii większych ściskających naprężeń głównych odpowiadających tej fazie procesu przedstawiają rysunki 1b oraz 1c. Gdy faza ruchu obejmuje cały ośrodek zgromadzony w zbiorniku trajektorie większych ściskających naprężeń głównych przyjmują kształt taki, jak zaznaczono na rysunku 1d. Równocześnie z redystrybucją stanu naprężenia zachodzi rozluźnienie struktury ośrodka.

Następna faza opróżniania zbiornika to zaawansowany wypływ, który powinien być w przybliżeniu stały w czasie, jeśli zbiornik ma pracować funkcjonalnie. Stąd też wynika duże zainteresowanie badaczy kinematyką wypływu ośrodka /4,65/. Zasadniczo obserwuje się dwie formy grawitacyjnego opróżniania zbiorników. Pierwsza to obsuwanie się ziaren równomiernie na całym przekroju. Przepływ taki nazywamy masowym i jest to najkorzystniejsza forma wypływu ośrodka (rys. 2a). Druga forma to obsuwanie się ziaren wąskim kanałem wytworzonym wewnątrz nieruchomego ośrodka. Przepływ taki nazywamy kominowym (rys. 2b). Występuje on w przypadku zbiorników o małym otworze wylotowym oraz małym pochyleniu ścian bocznych w części zbieżnej zbiornika. Ten rodzaj wypływu jest szczególnie niekorzystny ze względu na powstawanie tzw. martwych stref, a więc obszarów w zbiorniku gdzie nie następuje

wypływ ośrodka. Powstawanie martwych stref jest szczególnie niebezpieczne w przypadku przechowywania materiałów rolniczych ze względu na ryzyko wystąpienia zlegania, a w konsekwencji psucia się materiału



Rys. 2. Wypływ ośrodka sypkiego ze zbiornika /69,75/ a) wypływ masowy, b) wypływ kominowy

jeśli w porę nie zostanie usunięty na zewnątrz. Ryzyko to wzrasta w przypadku, gdy komory nie są opróżniane całkowicie, lecz równocześnie opróżniane i napełniane /67,69/.

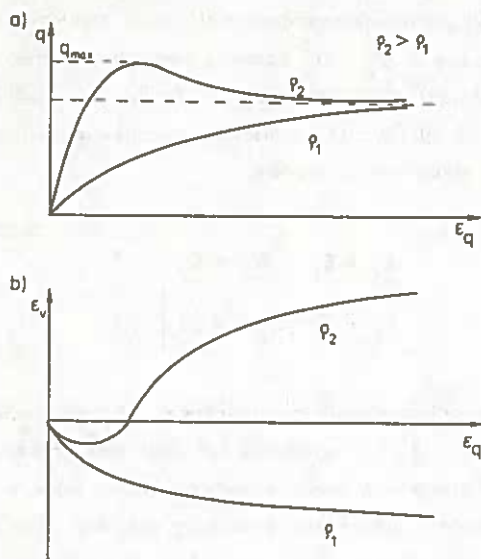
Kolejnym istotnym problemem jest powstawanie zawiesznień w komorach. Szczególnego znaczenia nabiera to zagadnienie w przypadku tzw. materiałów trudnozsypnych, które najczęściej występują w przemyśle spożywczym i paszowym. Do grupy tych materiałów należy zaliczyć zboża oraz ich przetwory, takie jak: otręby, śruta zbożowa, mąka, ponadto śruta nasion oleistych, makuchy, a także mączki pochodzenia zwierzęcego oraz mączki z suszu roślin. Aby umożliwić samoczynne opróżnianie komór zawierających tego typu materiały stosuje się specjalnego kształtu leje wylotowe. Można też stosować wibratory wspomagające wypływ lub sprężone powietrze /20,68,69/.

Właściwości mechaniczne ośrodków ziarnistych

Wspólną cechą ośrodków ziarnistych wyróżniającą je spośród innych ośrodków jest znikoma wartość bądź całkowity brak wytrzymałości na rozciąganie. Podczas działania naprężeń ściskających materiały te charakteryzuje znaczna ściśliwość oraz zmienna wytrzymałość na ścinanie zależna od wstępnego zagęszczenia ośrodka. Właściwości te najłatwiej jest prześledzić na przykładzie standardowych eksperymentów bezpośredniego ścinania oraz trójosiowego ściskania wykonywanych przez wielu badaczy na piasku oraz innych ośrodkach rozdrobnionych /22,53,73/. Typowe charakterystyki materiałów ziarnistych w próbie ścinania przy stałym naprężeniu normalnym przedstawiają rysunki 3a oraz 3b. Jeśli weźmiemy do badań ten sam materiał, lecz o dwóch różnych gęstościach ρ_1 i ρ_2 , przy czym $\rho_2 > \rho_1$, to dla tych samych programów obciążania otrzymamy dwie różne krzywe ścinania. Ośrodek luźno usypany zagęszcza się podczas próby ścinania, a naprężenie ścinające rośnie monotonicznie do pewnej wartości granicznej odpowiadającej dużym odkształceniom postaciowym. Odmienne natomiast zachowuje się w tym samym czasie ośrodek wstępnie zagęszczony. Po krótkiej fazie zagęszczania ośrodek zaczyna się rozluźniać. Naprężenie ścinające początkowo gwałtownie

rośnie, a po przekroczeniu maksymalnej wytrzymałości, gdy ośrodek zaczyna się rozluźniać, naprężenie to maleje do wartości granicznej odpowiadającej zaawansowanemu plastycznemu płynięciu.

Zmiany gęstości ośrodka ziarnistego mogą być powodowane zarówno działaniem ciśnienia hydrostatycznego, jak również działaniem naprężeń ścinających. Działanie ciśnienia hydrostatycznego powoduje tylko zagęszczenie materiału, podczas gdy działanie naprężeń ścinających może powodować zarówno zagęszczenie, jak i rozluźnienie struktury materiału, zależnie od wcześniejszej drogi obciążenia. Im bardziej zagęszczony był ośrodek, tym większy nastąpi przyrost jego objętości po przekroczeniu maksymalnej wytrzymałości. W końcowym stadium ścinania działające między ziarnami siły ustalają się, odkształcenie postaciowe zaś zachodzi bez dalszej zmiany objętości próbki /14,44,52,55/.



Rys. 3. Charakterystyki mechaniczne ośrodka sypkiego w próbie ścinania /15/ p_1 - ośrodek luźny, p_2 - ośrodek zagęszczony

Model ośrodka ziarnistego o wzmocnieniu gęstościowym

Ośrodek ziarnisty poddawany działaniu dowolnych naprężeń zewnętrznych wywołujących jego odkształcenie może w pewnych warunkach osiągnąć stan graniczny i płynąć plastycznie jak nieściśliwa ciecz z tarciem wewnętrznym. Koncepcje ośrodka o wzmocnieniu gęstościowym starają się przewidzieć całkowitą zmianę stanu ośrodka z dowolnego stanu początkowego do dowolnego innego stanu statycznego lub do końcowego stanu plastycznego z nieograniczonym plastycznym płynięciem. W modelu tym zakłada się, że ośrodek ziarnisty ma nie jedną granicę plastyczności, lecz całą ich rodzinę.

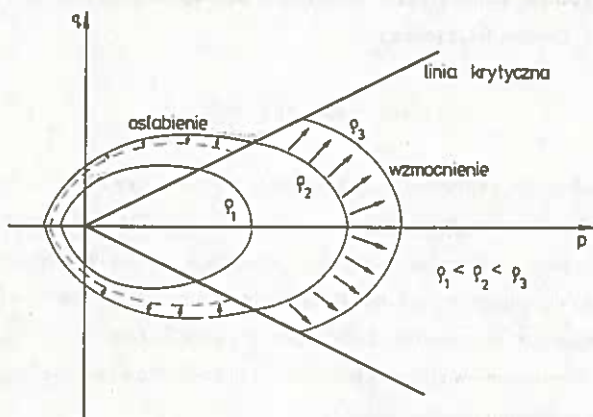
$$f(p, q, \rho) = 0, \quad (1)$$

gdzie $p = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$ oznacza średnie ciśnienie hydrostatyczne, $\sigma_1, \sigma_2 = \sigma_3$ zaś oznaczają naprężenia główne w osiowo-symetrycznym stanie naprężenia i $q = \sigma_1 - \sigma_2$ oznacza podwójną wartość maksymalnego naprężenia ścinającego. Parametrem wzmocnienia jest gęstość ośrodka ρ /15,43,59,63/. Odkształcenie ośrodka wygodnie jest przedstawić na pomocą dwóch parametrów:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_v &= \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 \\ \epsilon_q &= \frac{2}{3} (\epsilon_1 - \epsilon_2) \end{aligned} \right\}, \quad (2)$$

gdzie ϵ_v oznacza odkształcenie objętościowe, ϵ_q odkształcenie postaciowe, ϵ_1, ϵ_2 oraz ϵ_3 zaś oznaczają odkształcenia główne. Ponieważ większej gęstości odpowiada większa wytrzymałość, więc warunek plastyczności jest monotonicznie rosnącą funkcją gęstości. Dla poszczególnych gęstości ρ otrzymujemy na płaszczyźnie (p, q) zamknięte krzywe - powierzchnie plastyczności - oddzielające stany plastyczne ośrodka od stanów sprężystych (rys. 4). Na rysunku tym linia krytyczna oddziela obszar zagęszczenia, w którym odkształceniom plastycznym towarzyszy wzrost gęstości ośrodka oraz rozszerzanie się powierzchni plastyczności.

ci, od obszaru rozluźnienia, w którym odkształceniom postaciowym towarzyszy dylatacja ośrodka oraz kurczenie się powierzchni plastyczności. Linia krytyczna reprezentuje stan naprężenia w ośrodku powodujący plastyczne odkształcenie bez zmiany gęstości ośrodka, a więc odpowiada zaawansowanemu plastycznemu płynięciu.



Rys. 4. Model ośrodka ziarnistego o wzmocnieniu gęstościowym [63/

Zachowanie się materiałów ziarnistych w obszarze rozluźnienia jest szczególnie interesujące z punktu widzenia procesów mechanicznych zachodzących w zbiorniku w początkowej fazie wypływu ośrodka. W praktyce następuje wtedy przejście ze stanu maksymalnej wytrzymałości ośrodka do stanu nieograniczonego plastycznego płynięcia, któremu towarzyszy rozluźnienie struktury ośrodka oraz spadek wytrzymałości na ścinanie [54,56]. Tymczasem omówiony wyżej model plastyczności ze wzmocnieniem gęstościowym dający dobry opis zachowania się ośrodka w zakresie zagęszczania i stanu granicznego, nie formułuje jednoznacznej zależności naprężenie-odkształcenie w obszarze rozluźnienia ośrodka. Dlatego też linię krytyczną reprezentującą zaawansowane plastyczne płynięcie ośrodka traktuje się często jako wystarczające przybliżenie rzeczywistego stanu naprężenia w materiale [15]. Zgodnie z omówionym modelem, różnym punktom tej linii odpowiada wtedy różna gęstość ośrodka.

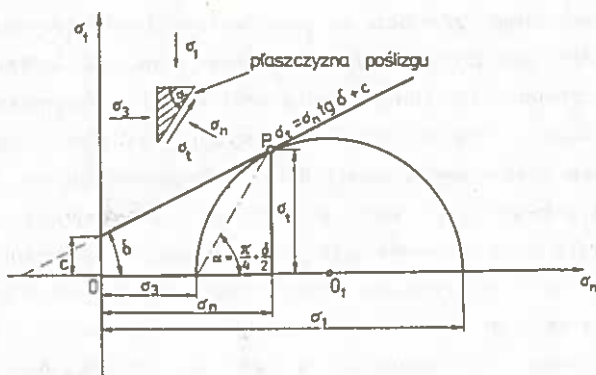
Warunek plastyczności Coulomba-Mohra

Według koncepcji Coulomba zniszczenie struktury ośrodka następuje wzdłuż określonej płaszczyzny ścicia, gdy naprężenie ścinające przewyższy opór tarcia wewnętrznego oraz kohezję między cząstkami ośrodka. W rozwiązywaniu konkretnych zagadnień najczęściej przyjmuje się liniowy warunek Coulomba-Mohra:

$$\sigma_t = \sigma_n \operatorname{tg} \delta + c, \quad (3)$$

gdzie σ_t oznacza naprężenie ścinające, σ_n - naprężenie normalne, δ - kąt tarcia wewnętrznego, c - spójność [26,33]. Płaszczyzna, na której naprężenie normalne i styczne spełniają wyżej wymieniony warunek nosi nazwę płaszczyzny poślizgu i jest ona nachylona względem kierunku mniejszego naprężenia głównego σ_3 pod kątem $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\delta}{2}$ (rys. 5). Kryterium wytrzymałości Coulomba-Mohra można zapisać również w alternatywnej postaci [44]:

$$\frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3) = \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \delta + c \cos \delta, \quad (4)$$



Rys. 5. Warunek plastyczności Coulomba-Mohra [33/

z której wynika, że o osiągnięciu stanu plastycznego decyduje jedynie najmniejsze oraz największe naprężenie główne, natomiast pośrednie naprężenie główne σ_2 nie ma wpływu na osiągnięcie stanu plastyczności. Powyższe kryterium wytrzymałości jest powszechnie stosowane jako warunek osiągnięcia stanu plastyczności w ośrodku ziarnistym we wszystkich tych problemach gdzie zachodzi potrzeba określenia stanu naprężenia oraz parcia materiału na konstrukcje w stanie granicznej wytrzymałości ośrodka.

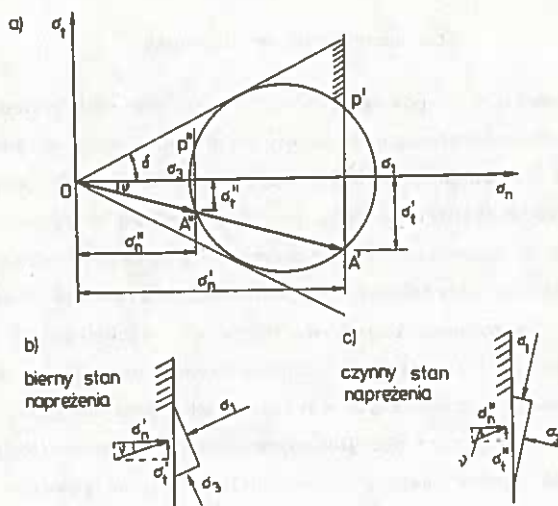
Stan naprężenia w zbiorniku

Jeden z bardziej rozpowszechnionych sposobów efektywnego określania parć ośrodka ziarnistego na ściany zbiornika bazuje na metodzie opracowanej przez Janssena w 1895 /11/. Istotą tej metody jest zastąpienie elementarnego obszaru ośrodka poziomą warstwą o wysokości dh . Taka modyfikacja sprowadza się do zastąpienia lokalnych wartości naprężeń wartościami uśrednionymi po skończonym wymiarze elementu, co w efekcie daje zastąpienie cząstkowych równań różniczkowych lokalnej równowagi naprężeń, równaniami różniczkowymi zwyczajnymi odpowiadającymi równowadze naprężeń dla warstwy o skończonym wymiarze poprzecznym oraz wysokości dh . Dodatkowym założeniem niezbędnym do rozwiązania tak postawionego problemu było przyjęcie pewnego związku między naprężeniami działającymi na warstwę ośrodka. Janssen założył, że stosunek naprężenia normalnego w kierunku poziomym σ_n do naprężenia normalnego w kierunku pionowym σ_x jest stały:

$$\frac{\sigma_n}{\sigma_x} = k = \text{const.} \quad (5)$$

Metoda Janssena ulegała licznym modyfikacjom /20,42,64/. Wielu autorów próbowało nie tylko wyznaczyć doświadczalnie stałą k , ale również nadać jej sens fizyczny - wiążąc ją z właściwościami mechanicznymi ośrodka. Przyjęcie liniowego warunku plastyczności Coulomba-Mohra oraz współczynnika tarcia materiału o ścianę zbiornika pozwala w spo-

sób jednoznaczny określić współczynnik Janssena k . Dokładną analizę zależności stałej k od kąta tarcia wewnętrznego ośrodka δ oraz kąta tarcia materiału o ścianę zbiornika φ przedstawił Drescher [17]. Naturalną konsekwencją przyjęcia warunku plastyczności oraz tarcia materiału o zbiornik jest możliwość istnienia dwóch orientacji przestrzennych kierunków naprężeń głównych przy niezmiennych ich wartościach. Stan naprężenia panujący przy ścianie zbiornika ilustrują na płaszczyźnie Mohra wektory OA' oraz OA'' (rys. 6). Wektor OA' oraz wszystkie symbole ze



Rys. 6. Bierny i czynny stan naprężenia [17] - symbole ze wskaźnikiem ('') oznaczają bierny stan naprężenia, - symbole ze wskaźnikiem (') oznaczają czynny stan naprężenia

wskaźnikiem (') reprezentują tzw. bierny stan naprężenia, wektor OA'' zaś oraz symbole ze wskaźnikiem (') reprezentują czynny stan naprężenia. Na podstawie licznych prac eksperymentalnych [7,9,29,36,40,62,72] można stwierdzić, że czynny stan naprężenia daje dobre przybliżenie rzeczywistego rozkładu nacisku na ściany zbiornika podczas fazy napełniania oraz magazynowania ośrodka w zbiorniku, bierny zaś stan naprężenia odpowiada fazie wypływu ośrodka. Z badań tych wynika ponad-

to, że dynamiczny nacisk na ściany występujący w fazie wypływu przewyższa nacisk statyczny odpowiadający fazie magazynowania. Mniej natomiast rozpoznany został sam moment przejścia stanu naprężenia z warunków statycznych w fazie magazynowania do warunków dynamicznych odpowiadających wypływowi ośrodka. Z badań eksperymentalnych Borcza i innych /61/ wynika, że w fazie rozpoczynania wypływu ze zbiornika pojawia się zwiększony dynamiczny nacisk ośrodka na ściany trwający około 1 s.

Duże kłopoty eksperymentalne sprawia dokładne prześledzenie przemieszczania się wzdłuż wysokości zbiornika frontu zwiększonego nacisku dynamicznego na ściany ze względu na krótki czas trwania tego procesu rzędu ułamka sekundy. Niemniej jednak wielu badaczy podejmowało to zagadnienie od strony teoretycznej. Walters /78,79/ rozpatrywał skok naprężenia na granicy oddzielającej obszar statycznego stanu naprężenia od obszaru naprężeń dynamicznych. Podobne rozważania dotyczące zwiększonego dynamicznego nacisku skupionego w chwili rozpoczynania wypływu prowadził Jenike /30/. Szymański i Mróz /70,71/, uwzględniając w ramach metody Janssena siły bezwładności ośrodka podczas ustalonego wypływu ośrodka, znaleźli rozkład nacisków dynamicznych na ściany zbiornika. Autorzy ci rozważyli również skok nieciągłości naprężenia wywołany przejściem z czynnego do biernego stanu naprężenia. Wspólnym mankamentem wspomnianych wyżej przybliżonych opisów wzrostu nacisku na ściany, w chwili rozpoczynania wypływu jest rozpatrywanie skoku naprężenia bez powiązania z kinematyką ruchu ośrodka. Otrzymane rozwiązania nie pozwalają więc jednoznacznie zlokalizować położenia frontu zwiększonego nacisku w czasie rozpoczynania wypływu. Ponadto sama wartość otrzymanego w ten sposób skoku naprężenia budzi zastrzeżenia ze względu na przyjęcie bardzo uproszczonego modelu procesu, w którym pomija się zupełnie siły bezwładności wynikające z niestalonego charakteru procesu.

Kolejnym krokiem w teoretycznym opisie niestalonego dynamicznego wypływu ośrodka z silosu było uwzględnienie przez Wol-Gajewską /80/ sił bezwładności przy założeniu, że prędkość cząstek ośrodka jest funkcją położenia oraz czasu. Korzystając z uproszczonej metody Janssena

autorka znalazła pole prędkości i naprężeń w ośrodku oraz położenie górnej swobodnej powierzchni wypływającego materiału w każdej chwili wypływu. Uproszczeniem tego opisu było przyjęcie założenia, że w chwili otwarcia wylotu zbiornika w całym ośrodku panuje już bierny stan naprężenia, a ruch ośrodka rozpoczyna się równocześnie w całej objętości. Oznacza to całkowite pominięcie początkowej fazy wypływu, w której chwilowy obszar ruchu ośrodka jest określony przez położenie frontu rozluźnienia ośrodka.

Eksperymentalne badania kinematyki początkowej fazy wypływu ośrodka ze zbiornika

Bariera, która propaguje się w początkowej fazie wypływu ośrodka rozdrobionego ze zbiornika, oddziela materiał znajdujący się jeszcze w fazie magazynowania od materiału będącego już w ruchu. Przejście takiej fali powoduje nie tylko zmianę stanu naprężenia, ale również zmianę gęstości ośrodka, prowadząc w efekcie do rozluźnienia struktury materiału. Kinematykę przemieszczania się takiej fali w kolumnie z piaskiem badali Baker i Triandafilidis /3/. Podobnie Takahashi i współpracownicy /72/ rejestrowali przemieszczanie się w górę zbiornika frontu rozluźnienia ośrodka, fotografując początkową fazę wypływu trocin z płaskiego, klinowego zbiornika. Z przedstawionych przez autorów fotografii widać, że rejestrowana fala ruchu stanowiła nieciągłość ośrodka, przy czym propagacja fali ruchu w górę zbiornika odbywała się jako załamywanie się kolejnych chwilowych sklepień powyżej fazy ruchu.

Chatlynne i Resnick /8/, badając początkową fazę wypływu materiału ziarnistego ze zbiornika, usypywali różnokolorowe warstwy ośrodka, a następnie zatrzymywali wypływ, gdy przemieszczanie cząstek osiągnęło założoną wartość. W celu dokładnej analizy pola przemieszczenia kolumnę z ośrodkiem sypekim zalewano żywicą. W ten sposób wyznaczone pole przemieszczenia ośrodka w kolejnych chwilach wypływu identyfikowało kolejne chwilowe położenie fali rozluźnienia ośrodka. Stwierdzono, że przejście fali rozluźnienia spowodowało wzrost porowatości ośrodka od wartości 0,41 w stanie magazynowania do wartości 0,47 w fazie wypływu.

Podobną metodę zastosował Novosad /45/ do badania pola przemieszczenia cząstek w modelu płaskiego zbiornika.

Bransby, Blair-Fish i James /5,6/ zastosowali metodę fotografii rentgenowskiej do określenia pola płaskiej deformacji ośrodka sypkiego podczas początkowej fazy wypływu z klinowego zbiornika. W ośrodku umieszczono małe kulki - znaczniki przemieszczenia. Swobodny wypływ ośrodka zatrzymywano, wykonując co jakiś czas fotografie rentgenowskie przemieszczonego ośrodka. Porównanie kolejnych fotografii pozwoliło na określenie przemieszczenia ośrodka, różne zaś naświetlenie kliszy zlokalizowało dokładnie powstające w trakcie wypływu obszary zwiększonej porowatości ośrodka. Z przedstawionych przez tych autorów zdjęć wynika, że przejście frontu rozluźnienia przez ośrodek nie wytwarza jednorodnego wzrostu porowatości, lecz powstają charakterystyczne linie nieciągłości gęstości ośrodka. Linie te utożsamione są z nieciągłością prędkości cząstek ośrodka. Oznacza to, że podczas przemieszczania się cząstek ośrodka wytwarzają się obszary sztywnego ruchu całych bloków materiału. Wzajemne przemieszczanie się cząstek ośrodka występuje wtedy tylko w obszarach oddzielających poszczególne strefy ruchu sztywnego /41/.

W zastosowanych tu modelach budzi jednak zastrzeżenie zatrzymywanie wypływu co jakiś czas w celu przeprowadzenia pomiaru. Każde takie zaburzenie swobodnego wypływu zniekształca bowiem przebieg rzeczywistego procesu, wprowadzając trudny do oszacowania błąd pomiaru.

Rozkład porowatości ośrodka wewnątrz modelowego zbiornika podczas ustalonego wypływu ziarna pszenicy oraz nasion łubinu i rzepy badali Zuilichem, Egmond i Swart /82/. Do badań wykorzystano technikę prześwietlenia płaskiego modelowego zbiornika promieniowaniem γ wychodzącym z punktowego źródła. Wykonując pomiary w wielu punktach zbiornika otrzymano dokładną mapę porowatości ośrodka. Najniższą porowatość ośrodka zaobserwowano u góry zbiornika, największą zaś u dołu; ponadto w obszarze wylotu zbiornika stwierdzono największy gradient porowatości zarówno w kierunku pionowym, jak i poziomym. Wynika z tego, że rozkład porowatości ośrodka w fazie ruchu jest całkiem odmienny od tego, jaki obserwuje się w fazie magazynowania.

Z kolei Drescher i Michałowski /18/ zastosowali ultradźwiękową metodę pomiaru zmian gęstości ośrodka w trakcie wypływu z płaskiego zbieżnego kanału. Metoda ta pozwala w sposób ilościowy określić gęstość ośrodka w dowolnym momencie procesu deformacji.

Stereoskopową metodę pomiaru płaskiej deformacji zastosowali do pomiaru przemieszczenia cząstek ośrodka w silosie Drescher i inni /16/, a także Levison, Shmutler i Resnick /37/. Metoda ta wykorzystująca efekt stereoskopowy wywołany paralaksą czasową umożliwia precyzyjne wyznaczenie pola przemieszczenia cząstek. Dubis i Kmita /19/ filmowali kamerą filmową początkową fazę wypływu ośrodka z płaskiego zbiornika przy prędkości 60 klatek na sekundę. Stosując wspomnianą metodę fotogrametryczną do tak otrzymanych kolejnych chwilowych obrazów ośrodka autorzy wyznaczyli kształt i położenie czoła fali rozluźnienia w kolejnych chwilach wypływu. Wyliczona w ten sposób średnia prędkość przemieszczania się frontu fali rozluźnienia dla piasku wynosiła $4,33 \text{ ms}^{-1}$.

Fala rozluźnienia w ośrodku ziarnistym

Opisując zjawisko rozprzestrzeniania się zaburzenia w jednowymiarowym ośrodku materialnym wprowadza się założenie o istnieniu gładkiej jednoparametrowej rodziny punktów $Y(t)$ reprezentującej na płaszczyźnie zmiennych niezależnych x i t aktualne położenie x w chwili czasu t frontu zaburzenia. Prędkość rozprzestrzeniania się zaburzenia jest wtedy zdefiniowana jako:

$$U = U(t) = \frac{dY(t)}{dt} . \quad (6)$$

Wszystkie wielkości kinematyczne oraz ich pochodne są ciągłe dla każdej wartości zmiennych x i t z wyjątkiem punktów reprezentowanych przez krzywą $Y(t)$, gdzie mogą one doznawać skoku nieciągłości /21,34,48/. Skok nieciągłości funkcji $f(x,t)$ oznaczany jest nawiasem kwadratowym:

$$\begin{aligned} [f] &= f^- - f^+ , \\ f^\pm &= \lim_{x \rightarrow Y^\pm(t)} f(x,t), \end{aligned} \quad (7)$$

gdzie f^+ oraz f^- oznaczają graniczne wartości $f(x, t)$ bezpośrednio przed i za falą. Jeśli dodatkowo pochodna czasowa $\frac{\partial f}{\partial t}$ oraz pochodna przestrzenna $\frac{\partial f}{\partial x}$ funkcji f są również nieciągłe na froncie fali $Y(t)$, to zachodzi relacja:

$$\frac{d}{dt} [f] = \left[\frac{\partial f}{\partial t} \right] + v \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]. \quad (8)$$

Rząd najniższej pochodnej czasowej funkcji ruchu nieciągłej na krzywej $Y(t)$ decyduje o rzędzie i nazwie fali. Jeżeli druga pochodna przemieszczenia jest nieciągła, to mówimy, że mamy do czynienia z falą przyspieszenia (fala drugiego rzędu). Wtedy prędkość cząstek ośrodka v oraz odkształcenie ϵ są ciągłe w każdym punkcie ośrodka

$$[v] = [\epsilon] = 0, \quad (9)$$

podczas gdy ich pochodne czasowe są ciągłe wszędzie z wyjątkiem punktów reprezentowanych przez krzywą $x = Y(t)$, gdzie doznają skoku nieciągłości:

$$\left[\frac{\partial v}{\partial t} \right] \neq 0, \quad \left[\frac{\partial \epsilon}{\partial t} \right] \neq 0 \quad \text{dla } x = Y(t), \quad (10)$$

Amplitudą fali nazywamy skok w przyspieszeniu cząstek /47/

$$A(t) = \left[\frac{\partial v}{\partial t} \right]. \quad (11)$$

Z prawa zachowania pędu wynika, że w przypadku fali przyspieszenia nie występuje nieciągłość naprężenia σ dla $x = Y(t)$, natomiast będzie istniał skok gradientu naprężenia /49/:

$$\left[\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right] = \rho_0 \left[\frac{\partial v}{\partial t} \right], \quad (12)$$

gdzie ρ_0 oznacza początkową gęstość ośrodka.

Występowanie fali pierwszego rzędu łączy się z nieciągłością pierwszej pochodnej przemieszczenia. Mówimy wtedy, że jest to fala prędkości /50/ i zakładamy, że przemieszczenie cząstek ośrodka $u(x, t)$ jest ciągłą funkcją swych argumentów dla każdego x oraz t :

$$[u] = 0, \quad (13)$$

prędkość zaś cząstek ośrodka v oraz odkształcenie ε jest ciągle wszędzie z wyjątkiem punktów reprezentowanych przez krzywą $x = Y(t)$, gdzie doznaje skoku nieciągłości. Stosując relację (8) do funkcji $u(x, t)$, która z definicji jest ciągła dla każdego x i t otrzymujemy:

$$\frac{d}{dt} [u(x, t)] = \left[\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right] + U \left[\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right]. \quad (14)$$

W zagadnieniu jednowymiarowym, gradient deformacji $\frac{\partial u}{\partial x}$ jest równoznaczny z odkształceniem objętościowym ε_v , a zatem ze związku (14) otrzymujemy:

$$[v] + U [\varepsilon_v] = 0. \quad (15)$$

Z prawa zachowania masy wynika, że nieciągłości odkształcenia objętościowego $[\varepsilon_v]$ towarzyszyć musi nieciągłość gęstości ośrodka $[\rho]$, wobec czego falę prędkości nazywa się często falą uderzeniową [35].

Dodatkowy związek między nieciągłościami zmiennych konstytutywnych można otrzymać z całkowitej formy zasady zachowania pędu:

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho_0 v dx = (\sigma(x_2) - \sigma(x_1)) + \int_{x_1}^{x_2} \rho_0 g dx, \quad (16)$$

gdzie x_1 oraz x_2 oznacza dwa punkty ośrodka takie, że $x_1 < x_2$, g zaś oznacza przyspieszenie ziemskie.

Zakładamy dalej, że $x_1 < Y(t) < x_2$ i żądamy, aby $x_1 \rightarrow Y^-(t)$ oraz $x_2 \rightarrow Y^+(t)$. Korzystając z zasady Leibniza znajdujemy związek [47]:

$$\rho_0 U [v] = - [\sigma]. \quad (17)$$

Łącząc teraz związek (15) i (17) otrzymujemy następującą zależność:

$$U^2 = \frac{[\sigma]}{\rho_0 [\varepsilon_v]}, \quad (18)$$

z której wynika, że prędkość propagacji fali zależy od gęstości początkowej ośrodka ρ_0 , skoku naprężenia $[\sigma]$ na froncie fali oraz towarzyszącego temu zjawisku skoku odkształcenia objętościowego $[\epsilon_v]$.

Według tego związku oczywiste staje się, że do pełnego opisu propagacji fali w ośrodku sypkim niezbędne jest sformułowanie prawa fizycznego, stanowiącego związek między naprężeniem i odkształceniem ośrodka. Z tego powodu powszechnie przyjmowane założenie nieściśliwości ruchu ośrodka jest niewystarczające do opisu tego typu zjawiska. Model plastyczności ze wzmocnieniem gęstościowym mógłby być zastosowany jedynie do rozważania fali zagęszczenia, gdyż tylko w tym obszarze formuluje on jednoznaczną zależność naprężenie-odkształcenie. Natomiast w obszarze rozluźnienia ośrodka, gdy materiał przechodzi raptownie od stanu maksymalnej swej wytrzymałości do stanu zaawansowanego plastycznego płynięcia, model ośrodka o wzmocnieniu gęstościowym nie daje jednoznacznego związku naprężenie-odkształcenie.

Prostą interpretację fali rozluźnienia daje przedstawiona przez Cowin'a i Goodman'a /23,24/ koncepcja ośrodka sypkiego. Podstawą tego modelu jest wprowadzenie dodatkowej, kinematycznie niezależnej zmiennej, zwanej funkcją rozkładu objętości, która reprezentuje objętościowy rozkład granul w ośrodku i jest równa stosunkowi objętości zajmowanej przez poszczególne cząstki ośrodka do objętości ośrodka rozdrobionego utworzonego z tych cząstek. Gęstość objętościowa ośrodka jest wtedy interpretowana jako iloczyn dwóch kinematycznie niezależnych zmiennych: funkcji rozkładu objętości oraz gęstości poszczególnych granul, a więc może się zmieniać bądź jako rezultat zmian objętości przestrzeni między granulami, bądź w wyniku odkształceń objętościowych poszczególnych granul. Fakt istnienia dodatkowej niezależnej zmiennej zmusza do wprowadzenia dodatkowego równania równowagi sił, które będzie rządzić zmianami wolnych przestrzeni ośrodka. Wymienieni autorzy sformulowali dodatkowe równanie równowagi za pomocą rozważań termodynamicznych. Na bazie tego modelu Nunziato i Walsh /47,51/ wykazali, że w takim ośrodku mogą propagować się dwie fale rozluźnienia biegnące z różnymi prędkościami. "Szybka" fala przyspieszenia związana jest ze sprężystością poszczególnych granul, "wolna" zaś fala powstaje

na skutek zmian porowatości ośrodka. W przypadku ośrodka składającego się z nieściśliwych granул występuje tylko fala "wolna", która biegnie szybciej w luźno upakowanym ośrodku w porównaniu z ośrodkiem upakowanym gęsto /12/. W pewnych warunkach uformować się może również fala uderzeniowa, czyli fala, na której froncie doznaje skoku nieciągłości prędkość cząstek, odkształcenie oraz naprężenie.

Model Cowin'a i Goodman'a jest jednak zbyt rozbudowany, aby mógł być efektywnie zastosowany do opisu nieustalonego wypływu ośrodka ze zbiornika z uwzględnieniem dodatkowo fali rozluźnienia. Zawiera on ponadto kilka wprowadzonych parametrów mechanicznych, co do których nie udało się jak dotąd ustalić jednoznacznej interpretacji fizycznej. Utrudnia to więc dodatkowo możliwość praktycznego zastosowania modelu. Jak dotąd udało się zastosować ten model tylko do badań nielicznych i najprostszych praktycznych zagadnień, takich jak statyczna równowaga w zbiorniku /31,32/ bądź ustalony przepływ ośrodka przez równoległy kanał /57/. Bezsporną zaletą tego modelu jest jednakże możliwość jednoznacznej interpretacji różnego typu fal zagęszczenia i rozluźnienia w ośrodku ziarnistym.

Ostatnio w ramach uproszczonego podejścia do zagadnienia propagacji fali rozluźnienia w ośrodku rozdrobnionym Cowin i Comfort /13/ rozważali przejście uderzeniowej fali rozluźnienia przez cylindryczną kolumnę z ośrodkiem. Autorzy przyjęli, że naprężenie w ośrodku bezpośrednio za frontem fali maleje do zera, przez co uzależnili prędkość propagacji fali jedynie od zmiany gęstości ośrodka na froncie fali. Wyliczony w ten sposób czas przejścia fali przez kolumnę z ośrodkiem porównano z wynikami badań eksperymentalnych uzyskując zadowalającą zgodność. Zaproponowany model dotyczy jednak bardzo specyficznej sytuacji, gdy naprężenia na froncie fali maleją do zera, co praktycznie oznacza naruszenie ciągłości ośrodka.

Z przedstawionego przeglądu literatury wynika wyraźnie, że zagadnienie magazynowania i wypływu ośrodków ziarnistych ze zbiorników jest od wielu lat przedmiotem licznych badań teoretycznych i doświadczalnych. Pomimo to, istnieje jeszcze wiele zagadnień bądź niejasnych, bądź niewystarczająco dokładnie rozwiązanych. Do tej właśnie

grupy zagadnień, stosunkowo słabo poznanych, należy początkowa faza wypływu ośrodka ze zbiornika. Istniejące w tej dziedzinie badania są fragmentaryczne i nie dają kompletnego rozwiązania zagadnienia. Prace doświadczalne dotyczą na ogół pojedynczych aspektów zjawiska, jak np. zwiększonego nacisku dynamicznego na ściany zbiornika w początkowej fazie wypływu /61/, zmiany gęstości ośrodka w zbiorniku /6,8,82/ lub ewolucji pola prędkości i przemieszczenia w początkowej fazie wypływu /3,5,19,37/. Każde z tych badań pozwala na wyciągnięcie szczegółowych wniosków, których nie można jednak powiązać ze sobą wprost w jednolity obraz przebiegu procesu ze względu na odmienne warunki poszczególnych eksperymentów.

Istniejące rozważania teoretyczne próbują na ogół opisać przebieg tego procesu równaniami odpowiadającymi stanowi ustalonemu /17,71/, a jeżeli nawet uwzględniają nie ustalony charakter procesu, to jednak pomijają nadal całkowicie propagację fali rozluźnienia /80/. Pojawiający się natomiast w niektórych pracach teoretycznych skok naprężenia wynika z założenia przejścia stanu naprężenia z czynnego do biernego bez szukania związku z kinematyką ruchu ośrodka, co faktycznie uniemożliwia prześledzenie przebiegu procesu /30,70,78,79/.

Z kolei rozwinięte ostatnio teoretyczne badania propagacji fali rozluźnienia na podstawie modelowego ośrodka Cowin'a i Goodman'a abstrahują całkowicie od konkretnych warunków brzegowych odpowiadających praktycznym konstrukcjom /12,47,50,51/. Również sam model ośrodka przyjęty w tych rozważaniach budzi zastrzeżenia ze względu chociażby na brak interpretacji fizycznej niektórych stałych tego modelu.

Jak stąd wynika początkowa faza grawitacyjnego wypływu ośrodka ziarnistego ze zbiornika nie została dokładnie poznana, a zwłaszcza odczuwa się wyraźny brak opracowania teoretycznego. Chociaż prace eksperymentalne /6,8,19,37,72/ wskazują wyraźnie, że nieodłącznym elementem tej fazy wypływu jest propagacja fali rozluźnienia, to jednak zjawisko to nie zostało w pełni uwzględnione w rozwiązaniach modelowych. Dlatego też w niniejszej pracy podjęto próbę sformułowania matematycznego opisu początkowej nieustalonej fazy wypływu ośrodka ziarnistego ze zbiornika na podstawie koncepcji propagacji fali rozluźnie-

nia. Należy sądzić, że uwzględnienie tego zjawiska w teoretycznym modelu pozwoli otrzymać nowe jakościowo elementy rzeczywistego wpływu.

Podstawę sformułowania tego modelu stanowią następujące spostrzeżenia i wnioski zaczerpnięte z literatury:

1. Wpływ ośrodka sypanego ze zbiornika jest procesem nieustalonym, gdyż na skutek zmiany ilości materiału w zbiorniku zmienia się wypadkowa siła grawitacji. Jednak najszybsze zmiany w przebiegu procesu występują jedynie w jego początkowej fazie.

2. W chwili otwarcia wylotu zbiornika propaguje się w zgromadzonym materiale od dołu zbiornika ku górze front rozluźnienia ośrodka.

3. Przemieszczający się front rozluźnienia powoduje wzrost porowatości ośrodka oraz zmianę stanu naprężenia w ośrodku ze stanu czynnego odpowiadającego fazie magazynowania do stanu biernego odpowiadającego fazie wpływu.

4. Zachowanie się ośrodka na froncie fali rozluźnienia jest niestacyczne: naprężenie gwałtownie maleje, a struktura ośrodka rozluźnia się. Proces taki można traktować jako przejście ośrodka wstępnie zagęszczonego ze stanu maksymalnej wytrzymałości do stanu zaawansowanego plastycznego płynięcia.

5. W fazie magazynowania najniższą porowatość ośrodka obserwuje się w najniższych warstwach w zbiorniku, a najwyższą na górze, w fazie zaś wpływu odwrotnie: najwyższa porowatość występuje w dolnych warstwach ośrodka, a najniższa na górze.

6. Fala rozluźnienia przemieszcza się szybciej w ośrodku luźno usypanym, a wolniej w ośrodku zagęszczonym.

CEL BADAŃ I HIPOTEZY ROBOCZE

Celem niniejszej pracy było sformułowanie matematycznego opisu początkowej, nieustalonej fazy wpływu ośrodka ziarnistego ze zbiornika na podstawie doświadczalnie obserwowanego zjawiska rozprzestrzeniania się w ośrodku rozpoczynającym wpływ fali rozluźnienia przebiegającej od wylotu zbiornika ku górze oraz porównanie otrzymanego rozwiązania modelowego z wynikami badań doświadczalnych.

Do efektywnego rozwiązania przedstawionego zagadnienia zastosowano przybliżoną metodę Janssena pozwalającą zredukować problem przestrzenny do jednowymiarowego. Wykorzystując tę metodę rozwiązania zagadnienia podążano jednocześnie za kierunkiem poszukiwań teoretycznych rozwiniętych ostatnio między innymi przez Mroza, Szymańskiego, Dreschera, Wol-Gajewską [17,70,71,80], co stworzyło z drugiej strony możliwość dokładnego porównania otrzymanego rozwiązania z innymi przybliżeniami procesu wypływu pomijającymi zjawisko propagacji fali rozluźnienia.

Zamierzony cel realizowano przez następujące zagadnienia:

1. Sformułowanie równań ruchu ośrodka ziarnistego w zbiorniku oraz ich numeryczne rozwiązanie.
2. Ocenę wpływu parametrów mechanicznych ośrodka oraz geometrii zbiornika na otrzymane rozwiązania.
3. Porównanie uzyskanych rozwiązań z innymi przybliżonymi opisami procesu wypływu, znanymi z literatury.

4. Doświadczalne zbadanie przebiegu początkowej fazy wypływu roślinnych materiałów ziarnistych (ziarno zbóż, nasiona rzepaku, kłębki buraka cukrowego) z modelowego zbiornika:

- wyznaczenie podstawowych parametrów mechanicznych badanych ośrodków użytych w rozważanym modelu,
- określenie wpływu rodzaju ośrodka ziarnistego, jego zagęszczenia i wilgotności na prędkość przemieszczania się fali rozluźnienia.
- określenie wpływu geometrii zbiornika na prędkość przemieszczania się fali rozluźnienia,
- porównanie teoretycznej wartości wypływu z wynikami badań doświadczalnych.

Na podstawie informacji dostępnych z literatury oraz dotychczasowych wyników badań własnych przyjęto następujące hipotezy robocze:

H_1 - uwzględnienie w teoretycznym modelu początkowej fazy wypływu ośrodka ziarnistego ze zbiornika propagacji fali rozluźnienia w ramach przybliżonej metody Janssena pozwoli uzyskać poprawny opis przebiegu zjawiska. Model ten będzie zawierał ponadto nowe elementy rzeczywistego procesu, takie jak: powiązanie nieciągłości naprężenia z kinematyką ruchu cząstek oraz odkształcenie objętościowe ośrodka,

H_2 - prędkość propagacji fali rozluźnienia jest funkcją jej chwilowego położenia wzdłuż wysokości zbiornika. Jednakże w celu uproszczenia zagadnienia dopuszczalne jest przyjęcie w pierwszym przybliżeniu założenia o stałej wartości prędkości przemieszczania się fali wzdłuż całej wysokości zbiornika,

H_3 - rodzaj ośrodka ziarnistego, jego zagęszczenie i wilgotność istotnie wpływają na prędkość przemieszczania się oraz rodzaj fali rozluźnienia.

PROPONOWANY MODEL OPISU PRZEBIEGU PROCESU WYPŁYWU

Podstawę sformułowanego teoretycznego opisu początkowej fazy grawitacyjnego wypływu ośrodka ziarnistego ze zbiornika stanowiły zaczerpnięte z literatury doświadczalne obserwacje propagacji fali rozluźnienia ośrodka. W celu uzyskania efektywnego rozwiązania omawianego zagadnienia konieczne było poczynienie pewnych upraszczających założeń. Wobec braku odpowiedniego związku konstytutywnego, opisującego zależność naprężenie-odkształcenie podczas rozluźnienia ośrodka, w przedstawionym modelu rozważono jedynie falę prędkości. Pozwoliło to ominąć konieczność korzystania z równania konstytutywnego ośrodka na froncie fali rozluźnienia, a występujące nieciągłości naprężenia i odkształcenie wyznaczono z ogólnej dynamicznej równowagi ośrodka. Z tego samego powodu w rozważanym modelu pominięto również rozluźnienie ośrodka poniżej frontu fali, przyjmując, że w tym obszarze ruch ośrodka jest nieściśliwy, tzn. odbywa się bez dalszej zmiany jego gęstości. W ten sposób zmiany gęstości ośrodka powstające w rzeczywistości w przestrzeni o pewnej skończonej objętości zastąpiono w przedstawionym modelu wypadkowym rozluźnieniem na froncie fali dylatacji.

Mając na uwadze łatwość efektywnego zastosowania zaproponowanych rozwiązań modelowych do najbardziej typowych zbiorników stosowanych do magazynowania materiałów sypkich rozważania przeprowadzono oddzielnie dla płaskiego i oddzielnie dla osiowo-symetrycznego stanu naprężenia. Szczególną uwagę zwrócono przy tym na przebieg procesu wypływu w części zbieżnej zbiornika, gdzie proces ten jest bardziej interesu-

jący niż na ogół sztywny ruch ośrodka w części równoległej zbiornika. Dlatego też do dalszych rozważań modelowych wybrano:

- 1 - dla przypadku płaskiego stanu naprężenia - zbiornik klinowy,
- 2 - dla przypadku osiowo-symetrycznego stanu naprężenia - zbiornik stożkowy.

Dodatkowo zastosowano również proponowany model propagacji fali rozluźnienia do kanału równoległego.

Propagacja fali prędkości w kanale klinowym

Zależności ogólne oraz przyjęte założenia

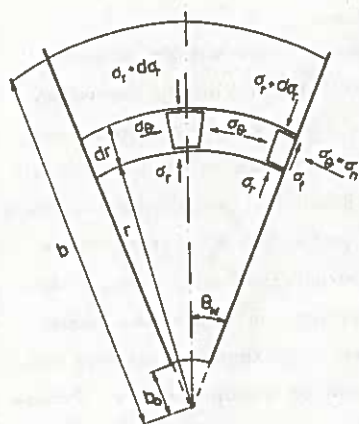
Do opisu zagadnienia przyjmujemy walcowy układ współrzędnych przestrzennych (r, θ, z) oraz czas t . Przez kanał klinowy rozumiemy zbiornik, którego dwie ściany nachylone są symetrycznie względem pionowej płaszczyzny pod kątem θ_w , dwie pozostałe zaś są pionowe. Jeżeli ponadto odległość między parą pionowych ścian jest wielokrotnie większa niż odległość między ścianami nachylonymi pod kątem θ_w , wtedy wpływ tarcia o ściany pionowe na stan ośrodka wewnątrz zbiornika jest znikomy i z dobrym przybliżeniem możemy powiedzieć, że w ośrodku panuje płaski stan naprężenia i odkształcenia, czyli poszczególne składowe tensora naprężenia i odkształcenia są niezależne od współrzędnej z . Ponieważ pomijamy tarcie ośrodka o pionowe ściany prostopadłe do osi z , naprężenie zaś normalne σ_z , działające w kierunku osi z , nie wchodzi nigdzie do równań równowagi ośrodka oraz jako pośrednie naprężenie główne nie wchodzi również do warunku plastyczności Coulomba-Mohra, w dalszych rozważaniach interesować nas będzie zatem tylko oddziaływanie w płaszczyźnie prostopadłej do osi z .

Ustalamy, że odkształcenia objętościowe są dodatnie przy rozluźnianiu, ujemne zaś przy zagęszczaniu ośrodka. Podobnie przyjmujemy, że naprężenia rozciągające są dodatnie, natomiast ściskające ujemne. Zakładamy, że ośrodek składa się z nieściśliwych granuł, natomiast odkształcenia objętościowe ośrodka możliwe są dzięki zmianie gęstości upakowania granuł. W szczególności możliwe jest rozluźnienie ośrodka, czyli wzrost jego porowatości, gdy naprężenie styczne przekroczy maksymalną wytrzymałość ośrodka (rys. 3). Jako związek konstytutywny

ośrodka przyjmujemy liniowy warunek plastyczności Coulomba-Mohra wyrażony równaniem (3) oraz niestowarzyszone prawo płynięcia. Przyjmujemy, że kąt tarcia materiału o nachylone pod kątem θ_w do ściany zbiornika ν jest stały i nie większy niż kąt tarcia wewnętrznego ośrodka δ :

$$\frac{\sigma_t}{\sigma_n} = \mu = \operatorname{tg} \nu = \text{const.}, \quad \nu \leq \delta, \quad (19)$$

gdzie μ oznacza współczynnik tarcia ośrodka o ściany.



Rys. 7. Naprężenie działające na elementarną warstwę ośrodka w zbiorniku klinowym

Jako elementarny obszar ośrodka wybieramy zgodnie z koncepcją Janssena walcową warstwę ośrodka o grubości dr ograniczoną powierzchniami: $r = \text{const.}$, $r + dr = \text{const.}$ oraz ścianami bocznymi kanału $\theta = \pm \theta_w$, gdzie θ_w oznacza nachylenie ścian bocznych, b_0 - promień wodzący odpowiadający poziomowi wylotu zbiornika, b - promień wodzący odpowiadający maksymalnej wysokości zasypanego materiału (rys. 7). Na powierzchni $r = \text{const.}$ działa naprężenie normalne σ_r , które jest funkcją kąta θ . Podobnie na powierzchni $(r + dr) = \text{const.}$ działa naprężenie $\sigma_r + d\sigma_r$. Przyjmujemy ponadto, że naprężenie normalne obwodowe σ_θ jest stałe

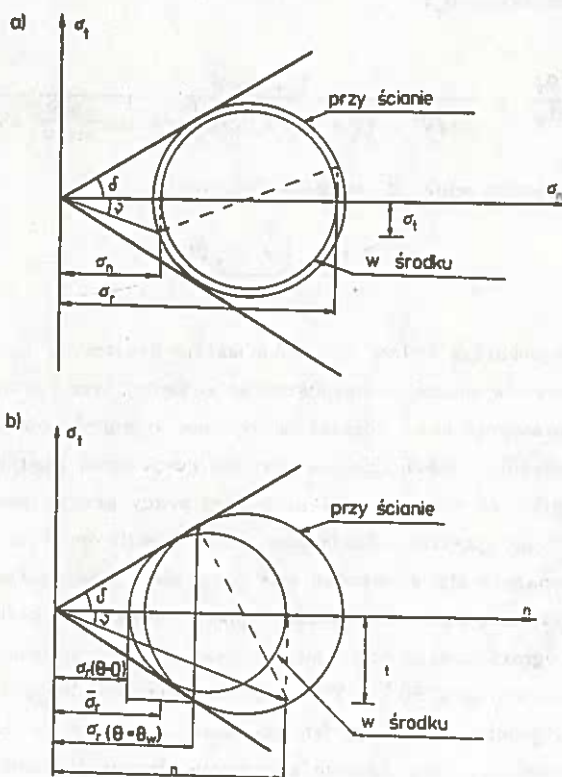
wzdłuż przekroju warstwy, a więc niezależnie od kąta θ . Na powierzchniach $\theta = \pm \theta_w$ stosunek naprężenia stycznego σ_t do naprężenia normalnego $\sigma_\theta = \sigma_n$ jest stały i określony przez współczynnik tarcia ośrodka o ściany μ zgodnie z równaniem (19). Na osi symetrii zbiornika naprężenia σ_r oraz σ_θ stają się naprężeniami głównymi.

Dla ośrodka znajdującego się w równowadze statycznej przyjmujemy czynny stan naprężenia, oraz zakładamy, że stan uplastycznienia ośrodka osiągnięty zostaje tylko przy ścianie zbiornika (rys. 8a). Przyjmujemy również, że naprężenie σ_r działające na powierzchnię $r = \text{const.}$ nie za-

łączy od kąta θ . Wtedy stosunek naprężenia stycznego σ_t działającego na ścianę zbiornika do naprężenia normalnego działającego w kierunku promieniowym określa związek [17]:

$$M^{**} = \frac{\sigma_t}{\sigma_r} = \frac{\sin \delta \sin \left[\arcsin \frac{\sin \nu}{\sin \delta} - \nu \right]}{1 + \sin \delta \cos \left[\arcsin \frac{\sin \nu}{\sin \delta} - \nu \right]} \quad (20)$$

Dla ośrodka znajdującego się w ruchu zakładamy bierny stan naprężenia oraz przyjmujemy, że uplastycznienie osiągnięte zostało tak przy



Rys. 8. Reprezentacja stanu naprężenia za pomocą kół Mohra [17]:
a) czynny stan naprężenia, uplastycznienie przy ścianie, b) bierny
stan naprężenia, uplastycznienie w środku warstwy i przy ścianie

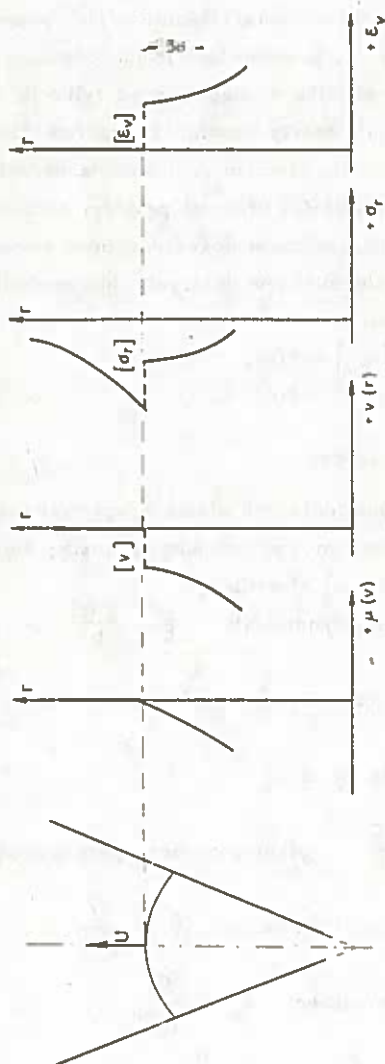
ścianie zbiornika, jak również w środku warstwy (rys. 8b). Wynika z tego, że naprężenie σ_r nie może już teraz być stałe na całym przekroju warstwy ośrodka, lecz będzie funkcją kąta θ . Ponieważ jednak w zastosowanej przybliżonej metodzie obliczeniowej lokalne naprężenie zastępowane jest naprężeniem uśrednionym po całym przekroju elementarnego obszaru, to zamiast wprowadzać rozkład naprężenia $\sigma_r(\theta)$ przyjmujemy, że na rozpatrywaną warstwę działa naprężenie średnie $\bar{\sigma}_r$, będące średnią arytmetyczną naprężenia σ_r przy ścianie zbiornika i na środku warstwy. Stała M^* określa wtedy zgodnie z pracą [17] stosunek naprężenia stycznego σ_t do średniego naprężenia normalnego w kierunku promieniowym $\bar{\sigma}_r$:

$$M^* = \frac{\sigma_t}{\bar{\sigma}_r} = \frac{1 + \sin \delta}{\operatorname{ctg} \psi - (1 + \sin \delta) \operatorname{ctg} \left[\arcsin \frac{\sin \psi}{\sin \delta} + \psi \right]}, \quad (21)$$

gdzie średnie naprężenie $\bar{\sigma}_r$ określa związek:

$$\bar{\sigma}_r = \frac{\sigma_r(\theta = \theta_w) + \sigma_r(\theta = 0)}{2}. \quad (22)$$

W chwili otwarcia wylotu zbiornika maleje gwałtownie naprężenie σ_r , początkowo w obszarze bezpośrednio sąsiadującym z otworem wylotowym, a następnie nowy rozkład naprężenia stopniowo obejmuje kolejne obszary ośrodka. Równocześnie ośrodek rozpoczyna nieustalony, dynamiczny wypływ ze zbiornika. W niniejszej pracy przyjmujemy uproszczony model tego zjawiska. Zakładamy, że w chwili otwarcia wylotu zbiornika propaguje się w ośrodku fala prędkości (fala uderzeniowa), której powierzchnia czołowa w każdej chwili czasu t ma kształt wycinka walca ograniczonego ścianami bocznymi oraz czołowymi zbiornika, a promień wodzący $\bar{r}(t) = Y(t)$ reprezentuje aktualne położenie frontu fali. Zgodnie z definicją fali prędkości podaną w rozdziale pt. Fala rozluźnienia... oraz zgodnie z przyjętą konwencją znaków na froncie fali wystąpi nieciągłość prędkości cząstek $[v] < 0$, nieciągłość odkształcenia objętościowego $[\varepsilon_v] > 0$ oraz nieciągłość naprężenia $[\sigma] > 0$. Jediną ciągłą funkcją czasu i położenia jest wektor przemiesz-



Rys. 9. Nicciągłość prędkości, naprężenia i odkształcenia objętościowego na froncie fali uderzeniowej

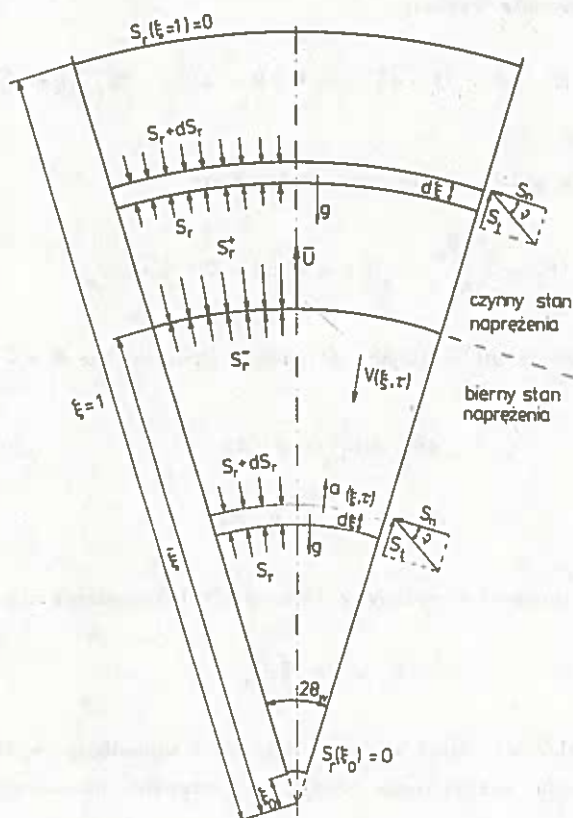
czenia cząstek ośrodka $u(r, t)$ - rys. 9. Wzajemne zależności między nieciągłościami tych zmiennych ustalają związki (15) i (17). Zakładamy ponadto, że poniżej frontu fali ruch ośrodka jest promieniowy (skierowany ku wierzchołkowi kanału) oraz nieściśliwy, a ponadto niezależny od kąta θ i współrzędnej z , powyżej zaś frontu ośrodek jest nadal w spoczynku. Rozluźnienie ośrodka występuje więc tylko na linii frontu fali. Prędkość propagacji fali zależy zgodnie ze wzorem (18) od związku $\sigma - \epsilon_v$ obowiązującego dla procesu rozluźnienia ośrodka po przekroczeniu maksymalnej wytrzymałości oraz od gęstości początkowej ośrodka ρ_0 . Wobec trudności z jednoznacznym doświadczalnym wyznaczeniem związku $\sigma - \epsilon_v$ dla procesu rozluźnienia w dalszych obliczeniach rozważone będą dwa przypadki procesu:

- $U = \text{const.}, [\epsilon_v] = f(\bar{r})$;
- $[\epsilon_v] = \text{const.}, U = f(\bar{r})$.

Równanie ruchu ośrodka

W celu ujednoczenia dalszych obliczeń wprowadzamy następujące wielkości bezwymiarowe, przyjmując jako jednostkę długości maksymalny promień części zbieżnej zbiornika b :

- aktualne położenie frontu fali $\bar{\xi} \equiv \frac{Y(t)}{b}$,
- poziom wylotu zbiornika $\xi_0 \equiv \frac{b_0}{b}$,
- promień wodzący $\xi \equiv \frac{r}{b}$,
- czas $\tau = t \sqrt{\frac{g}{b}}$, gdzie g oznacza przyspieszenie ziemskie,
- prędkość propagacji frontu fali $\bar{U} = \frac{U}{\sqrt{bg}}$,
- naprężenie promieniowe $S_r = \frac{\sigma_r}{\rho_0 g b}$,
- naprężenie normalne $S_n = \frac{\sigma_n}{\rho_0 g b}$,
- naprężenie styczne $S_t = \frac{\sigma_t}{\rho_0 g b}$,



Rys. 10. Siły działające na walcową warstwę ośrodka o grubości $d\xi$ dla ośrodka w równowadze statycznej oraz ośrodka w nieustalonym ruchu w kanale klinowym

Rozważamy, zgodnie z metodą Janssena, równowagę sił działających na elementarną warstwę ośrodka, czyli w naszym przypadku równowagę sił działających w kierunku pionowym na wycinek pierścienia o grubości $d\xi$ (rys. 10). Dla ośrodka znajdującego się w spoczynku będzie to równowaga sił powierzchniowych oraz siły ciężkości elementarnej warstwy ośrodka.

Wypadkowa siła działająca w kierunku pionowym na górną powierzchnię warstwy ośrodka wynosi:

$$F_1 = 2 \int_0^{\theta_w} (S_r + dS_r)(\xi + d\xi) \cos \theta d\theta = 2(S_r + dS_r)(\xi + d\xi) \sin \theta_w, \quad (23)$$

wypadkowa siła zaś na dolnej powierzchni jest:

$$F_2 = 2 \int_0^{\theta_w} S_r \xi \cos \theta d\theta = 2S_r \xi \sin \theta_w. \quad (24)$$

Podobnie przyrosty sił działające na powierzchnie boczne $\theta = \pm \theta_w$ wynoszą:

$$dF_3 = S_n \sin \theta_w d\xi, \quad (25)$$

$$dF_4 = S_t \cos \theta_w d\xi. \quad (26)$$

Przyrost siły masowej wyrażony w jednostkach bezwymiarowych wynosi:

$$dF_5 = 2 \theta_w \xi d\xi. \quad (27)$$

Dodając do siebie wszystkie składowe siły oraz zaniedbując wyrazy małe drugiego rzędu, otrzymujemy różniczkowe równanie równowagi statycznej:

$$\frac{dS_r}{d\xi} + \frac{1}{\xi} (S_r - S_n - S_t \operatorname{ctg} \theta_w) - \frac{\theta_w}{\sin \theta_w} = 0. \quad (28)$$

Wykorzystując związki (19) i (20) zachodzące między naprężeniami S_r , S_t i S_n równanie (28) można zapisać następująco:

$$\frac{dS_r}{d\xi} + (1 - m^{**}) \frac{S_r}{\xi} - \frac{\theta_w}{\sin \theta_w} = 0, \quad (29)$$

gdzie

$$m^{**} = \frac{M^{**}}{\mu} (1 + \mu \operatorname{ctg} \theta_w). \quad (30)$$

Równanie równowagi statycznej obowiązuje w przedziale zmiennej niezależnej ξ : $\bar{\xi}(\tau) < \xi \leq 1$. Całkując równanie (29) w podanych granicach oraz przyjmując, że górna powierzchnia ośrodka w zbiorniku jest swobodna $S_r(\xi = 1) = 0$, otrzymujemy rozkład naprężenia promieniowego wzdłuż wysokości zbiornika:

$$S_r(\xi) = - \frac{1}{2 \cdot m^{**}} \frac{\theta_w}{\sin \theta_w} \xi (\xi^{(m^{**}-2)} - 1) \quad \text{dla } m^{**} \neq 2 \quad (31)$$

oraz

$$S_r(\xi) = \frac{\theta_w}{\sin \theta_w} \xi \ln \xi \quad \text{dla } m^{**} = 2. \quad (32)$$

Dla $\xi = \bar{\xi}(\tau)$, a więc na froncie fali, otrzymujemy graniczną wartość naprężenia bezpośrednio przed falą:

$$S_r^+ = - \frac{1}{2 \cdot m^{**}} \frac{\theta_w}{\sin \theta_w} \bar{\xi} (\bar{\xi}^{(m^{**}-2)} - 1), \quad m^{**} \neq 2 \quad (33)$$

oraz graniczną wartość średniego naprężenia $\bar{S}_r$ bezpośrednio za falą:

$$\bar{S}_r = - \frac{1}{2 \cdot m^{**}} \frac{\theta_w}{\sin \theta_w} \bar{\xi} (\bar{\xi}^{m^{**}-2} - 1) + \bar{U}^2 [\epsilon_v], \quad m^{**} \neq 2. \quad (34)$$

Równanie równowagi dynamicznej walcowej warstwy ośrodka o grubości $d\xi$ (rys. 10) poniżej frontu fali rozluźnienia zawiera dodatkowo w porównaniu z równaniem (29) człon pochodzący od sił bezwładności:

$$\frac{d\bar{S}_r}{d\xi} + (1 - m^*) \frac{\bar{S}_r}{\xi} - \frac{\theta_w}{\sin \theta_w} = a_r(\xi, \tau) = 0, \quad (35)$$

gdzie $m^* = \frac{M^*}{\mu} (1 + \mu \operatorname{ctg} \theta_w)$ oraz $a_r(\xi, \tau)$ oznacza przyspieszenie cząstek ośrodka. Równanie to obowiązuje w przedziale zmiennej niezależnej $\xi_0 \leq \xi < \bar{\xi}(\tau)$.

Stała prędkość propagacji fali rozluźnienia

Zgodnie z przyjętymi założeniami graniczne wartości bezwymiarowej prędkości V_r cząstek na froncie fali wynoszą odpowiednio:

$$V_r^+ = 0, \quad V_r^- = -\bar{U} [\varepsilon_v]. \quad (37)$$

Uwzględniając założenie o promieniowym (skierowanym ku wierzchołkowi kanału), nieściśliwym i niezależnym od kąta θ i współrzędnej z ruchu ośrodka poniżej frontu fali możemy zapisać następujące wyrażenia definiujące poszczególne składowe prędkości cząstek:

$$V_r(\xi, \tau) = -\frac{\bar{\xi}}{\xi} \bar{U} [\varepsilon_v], \quad V_\theta = 0, \quad V_z = 0 \quad \text{dla} \quad \xi_0 \leq \xi < \bar{\xi}(\tau). \quad (38)$$

W wyrażeniu tym zgodnie z przyjętym założeniem prędkość fali $\bar{U}$ jest stała, czyli

$$\bar{\xi} = \bar{U}\tau + \xi_0, \quad (39)$$

a stąd

$$V_r(\xi, \tau) = -\frac{\bar{U}\tau + \xi_0}{\xi} \bar{U} [\varepsilon_v]. \quad (40)$$

Przyspieszenie $a_r(\xi, \tau)$ w nieustalonym przepływie ośrodka jest zarówno funkcją zmiennej przestrzennej ξ , jak również funkcją czasu τ , musi być zatem określone przez pochodną zupełną prędkości po czasie:

$$a_r(\xi, \tau) = \frac{dV_r(\xi, \tau)}{d\tau} = \frac{\partial V_r(\xi, \tau)}{\partial \tau} + V_r(\xi, \tau) \frac{\partial V_r(\xi, \tau)}{\partial \xi}. \quad (41)$$

Stosując tę formułę do wyrażenia (40), określającego prędkość cząstek ośrodka otrzymujemy jawną postać przyspieszenia:

$$a_r(\xi, \tau) = -\frac{\bar{U}^2}{\xi} [\varepsilon_v] - \left(\frac{\bar{U}^2}{\xi} \tau + \frac{\xi_0}{\xi} \bar{U} \right) \frac{\partial [\varepsilon_v]}{\partial \tau} - \frac{1}{\xi} \left(\frac{\bar{U}^2 \tau}{\xi} + \frac{\bar{U} \xi_0}{\xi} \right)^2 [\varepsilon_v] [\varepsilon_v], \quad (42)$$

którą można sprowadzić do prostszej postaci uwzględniając zależność (39)

$$a_r(\xi, \tau) = - \frac{\bar{U}^2}{\xi} [\varepsilon_v] - \frac{\bar{U}^2 \bar{\xi}}{\xi} \frac{\partial [\varepsilon_v]}{\partial \bar{\xi}} - \frac{\bar{U}^2 \bar{\xi}^2}{\xi^3} [\varepsilon_v] [\varepsilon_v]. \quad (43)$$

Podstawiamy teraz przyspieszenie $a_r(\xi, \tau)$ określone związkiem (43) do równania (35) i znajdujemy ostateczną postać równania ruchu ośrodka:

$$\frac{d\bar{S}_r}{d\bar{\xi}} + (1 - m^*) \frac{\bar{S}_r}{\bar{\xi}} - \frac{\theta_w}{\sin \theta_w} + \frac{\bar{U}^2}{\xi} \left\{ [\varepsilon_v] + \bar{\xi} \frac{\partial [\varepsilon_v]}{\partial \bar{\xi}} + \frac{\bar{\xi}^2}{\xi^2} [\varepsilon_v] [\varepsilon_v] \right\} = 0. \quad (44)$$

Względem funkcji $\bar{S}_r$ jest to liniowe równanie różniczkowe pierwszego rzędu przestrzennie jednowymiarowe. W równaniu tym występuje ponadto funkcja $[\varepsilon_v]$, która zależy od aktualnego położenia frontu fali $\bar{\xi}$, a zatem zależy od czasu τ z uwagi na związek (39). Rozwiązaniem równania (44) jest funkcja:

$$\begin{aligned} \bar{S}_r(\xi) = & C \xi^{m^*-1} + \frac{\theta_w}{\sin \theta_w} \frac{\xi}{2-m^*} - \frac{\bar{U}^2 ([\varepsilon_v] + \bar{\xi} \frac{d[\varepsilon_v]}{d\bar{\xi}})}{1-m^*} + \\ & + \frac{\bar{U}^2 \bar{\xi}^2}{(1+m^*) \xi^2} [\varepsilon_v] [\varepsilon_v], \quad m^* \neq 1, \quad m^* \neq 2, \end{aligned} \quad (45)$$

w której występują dwie nieznane funkcje czasu: $C(\bar{\xi})$ oraz $[\varepsilon_v(\bar{\xi})]$. Funkcje te wyznaczymy z warunków brzegowych na dolnej i górnej powierzchni ośrodka. Zakładając $\bar{S}_r(\xi = \xi_0) = 0$ otrzymujemy:

$$C = - \frac{\theta_w}{\sin \theta_w} \frac{\xi_0^{2-m^*}}{2-m^*} + \frac{\bar{U}^2 ([\varepsilon_v] + \bar{\xi} \frac{d[\varepsilon_v]}{d\bar{\xi}}) \bar{\xi}_0^{1-m^*}}{1-m^*} - \frac{\bar{U}^2 \bar{\xi}_0^{2-1-m^*}}{1+m^*} [\varepsilon_v] [\varepsilon_v]. \quad (46)$$

Znalezioną funkcję C podstawiamy do wyrażenia (45), co pozwoli wyrazić naprężenie $\bar{S}_r(\xi)$ następującym związkiem:

$$\bar{S}_r(\xi) = \frac{\theta_w}{\sin \theta_w} \frac{\xi}{2 - m^*} \left(1 - \left(\frac{\xi}{\xi_0} \right)^{m^*-2} \right) - \frac{\bar{U}^2 \left([\varepsilon_v] + \xi \frac{d[\varepsilon_v]}{d\xi} \right)}{1 - m^*} \left(1 - \left(\frac{\xi}{\xi_0} \right)^{m^*-1} \right) +$$

$$+ \frac{\bar{U}^2 \xi^2 [\varepsilon_v] [\varepsilon_v]}{(1 + m^*) \xi^2} \left(1 - \left(\frac{\xi}{\xi_0} \right)^{m^*+1} \right) \quad m^* \neq 1, m^* \neq 2 \quad (47)$$

W równaniu tym pozostaje jeszcze do wyznaczenia funkcja $[\varepsilon_v(\xi)]$. Znajdziemy ją podstawiając do równania (47) warunek brzegowy $\bar{S}_r(\xi = \xi_0)$ określony związkiem (34). Otrzymujemy stąd następujące równanie określające funkcję $[\varepsilon_v(\xi)]$:

$$\frac{d[\varepsilon_v]}{d\xi} = \frac{[\varepsilon_v]}{\xi} \left\{ [\varepsilon_v] \frac{1 - m^*}{1 + m^*} \frac{1 - \left(\frac{\xi}{\xi_0} \right)^{m^*+1}}{1 - \left(\frac{\xi}{\xi_0} \right)^{m^*-1}} - \frac{1 - m^*}{1 - \left(\frac{\xi}{\xi_0} \right)^{m^*-1}} - 1 \right\} +$$

$$+ \frac{\theta_w}{\bar{U}^2 \sin \theta_w} \left\{ \frac{1 - m^*}{2 - m^*} \frac{1 - \left(\frac{\xi}{\xi_0} \right)^{m^*-2}}{1 - \left(\frac{\xi}{\xi_0} \right)^{m^*-1}} - \frac{1 - m^*}{2 - m^*} \frac{1 - \left(\frac{\xi}{\xi_0} \right)^{m^*-2}}{1 - \left(\frac{\xi}{\xi_0} \right)^{m^*-1}} \right\},$$

$$m^* \neq 1, m^* \neq 2, m^{**} \neq 2 \quad (48)$$

a ponadto w szczególnym przypadku dla $m^* = 1, m^{**} \neq 2$:

$$\frac{d[\varepsilon_v]}{d\xi} = \frac{[\varepsilon_v]}{\xi} \left\{ \frac{1}{\ln \frac{\xi}{\xi_0}} \left(\frac{[\varepsilon_v]}{2} \left(1 - \frac{\xi^2}{\xi_0^2} \right) - 1 \right) - 1 \right\} +$$

$$+ \frac{\theta_w}{\bar{U}^2 \sin \theta_w \ln \frac{\xi}{\xi_0}} \left(1 - \frac{\xi}{\xi_0} - \frac{1 - \left(\frac{\xi}{\xi_0} \right)^{m^{**}-2}}{2 - m^{**}} \right) \quad (49)$$

oraz dla $m^* = 2, m^{**} \neq 2$:

$$\frac{d[\varepsilon_v]}{d\xi} = \frac{[\varepsilon_v]}{\xi} \left\{ -\frac{[\varepsilon_v]}{3} \frac{1 - \frac{\xi^3}{\xi_0^3}}{1 - \frac{\xi}{\xi_0}} + \frac{1}{1 - \frac{\xi}{\xi_0}} - 1 \right\} + \frac{\theta_w}{U^2 \sin \theta_w} \left\{ \frac{\ln \frac{\xi_0}{\xi}}{1 - \frac{\xi}{\xi_0}} + \frac{1 - (\xi)^{m^{**}-2}}{(2 - m^{**})(1 - \frac{\xi}{\xi_0})} \right\}. \quad (50)$$

Podobnie przypadek $m^{**} = 2$ otrzymać można uwzględniając w warunku brzegowym $\bar{S}_r(\xi = \xi)$ rozwiązanie statyczne wyrażone związkiem (32). Ostatecznie więc problem sprowadza się do rozwiązania nieliniowego równania różniczkowego pierwszego rzędu. Równania tego nie można rozwiązać analitycznie, lecz jedynie metodami numerycznymi. Wyniki obliczeń numerycznych zostaną omówione w następnym rozdziale.

Wyznaczenie funkcji $[\varepsilon_v(\xi)]$ pozwala znaleźć wszystkie pozostałe wielkości opisujące nieustalony ruch ośrodka. Bezwymiarowy wydatek wypływu Q ze zbiornika określa następujący związek:

$$Q = - \int_{-\theta_w}^{+\theta_w} V_r(\xi, \tau) \xi d\theta = - 2\theta_w \bar{\xi} \bar{U} [\varepsilon_v]. \quad (51)$$

Znając funkcję $[\varepsilon_v]$ można wyznaczyć również poszczególne składowe skoku naprężenia na froncie fali rozluźnienia. Bezpośrednio powyżej frontu fali naprężenie S_r^+ określa wzór (33), naprężenia zaś S_t^+ oraz S_n^+ można wyznaczyć ze związków:

$$\begin{aligned} S_t^+ &= M^{**} S_r^+, \\ S_n^+ &= \frac{M^{**}}{\mu} S_r^+. \end{aligned} \quad (52)$$

Natomiast poniżej frontu fali mamy:

$$S_r^- (\theta=0) = \frac{M^*}{\mu} \frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta} \bar{S}_r^-, \quad (53)$$

$$S_r^-(\theta=\theta_w) = \left(2 - \frac{M^*}{\mu} \frac{1 - \sin \delta}{1 + \sin \delta}\right) \bar{S}_r^-, \quad (53)$$

gdzie $\bar{S}_r^-$ związane jest z S_r^+ zależnością:

$$\bar{S}_r^- = S_r^+ + \bar{U}^2 [\epsilon_v]. \quad (54)$$

Składową styczną i normalną naprężenia wyznaczają związki analogiczne do wzorów (52):

$$\begin{aligned} S_t^- &= M^* \bar{S}_r^-, \\ S_n^- &= \frac{M^*}{\mu} \bar{S}_r^-. \end{aligned} \quad (55)$$

Na podstawie zależności: (52), (53), (54) i (55) możemy określić poszczególne składowe skoku naprężenia na froncie fali:

$$\begin{aligned} [S_t] &= S_r^+ (M^* - M^{**}) + M^* \bar{U}^2 [\epsilon_v], \\ [S_n] &= \frac{1}{\mu} [S_t], \\ [S_r(\theta=0)] &= \left(\frac{M^*}{\mu} \frac{1 - \sin \delta}{1 + \sin \delta} - 1 \right) S_r^+ + \frac{M^*}{\mu} \frac{1 - \sin \delta}{1 + \sin \delta} \bar{U}^2 [\epsilon_v], \end{aligned} \quad (56)$$

$$[S_r(\theta=\theta_w)] = \left(1 - \frac{M^*}{\mu} \frac{1 - \sin \delta}{1 + \sin \delta} \right) S_r^+ + \left(2 - \frac{M^*}{\mu} \frac{1 - \sin \delta}{1 + \sin \delta} \right) \bar{U}^2 [\epsilon_v].$$

Stała wartość rozluźnienia na froncie fali

Przyjęcie założenia o stałej wartości skoku odkształcenia objętościowego $[\epsilon_v] = \text{const.}$ na froncie fali rozluźnienia prowadzi, z uwagi na związek (18), do uziemiennienia prędkości propagacji fali $\bar{U}$. Podobnie rozumując jak w rozdziale pt. Stała prędkość... znajdujemy związek określający prędkość ruchu cząstek ośrodka poniżej frontu fali:

$$v_r(\xi, \tau) = - [\epsilon_v] \frac{\bar{\xi}}{\xi} \frac{d\bar{\xi}}{d\tau}, \quad v_\theta = 0, \quad v_z = 0, \quad (57)$$

gdzie $\frac{d\bar{\xi}}{d\tau} = \bar{U}(\bar{\xi})$.

Przyspieszenie cząstek określone zgodnie z formułą (41) wyraża wtedy następujący związek:

$$a_r(\xi, \tau) = - \frac{[\epsilon_v]}{\xi} \left(\frac{d\bar{\xi}}{d\tau} \right)^2 - [\epsilon_v] \frac{\bar{\xi}}{\xi} \frac{d^2 \bar{\xi}}{d\tau^2} - [\epsilon_v] [\epsilon_v] \frac{\bar{\xi}^2}{\xi^3} \left(\frac{d\bar{\xi}}{d\tau} \right)^2, \quad (58)$$

a zatem równanie ruchu ośrodka będzie miało postać:

$$\frac{d\bar{S}_r}{d\bar{\xi}} + (1-m^*) \frac{\bar{S}_r}{\bar{\xi}} - \frac{\theta_w}{\sin \theta_w} + \frac{[\epsilon_v]}{\bar{\xi}} \left\{ \left(\frac{d\bar{\xi}}{d\tau} \right)^2 \left(1 + [\epsilon_v] \frac{\bar{\xi}^2}{\bar{\xi}^2} \right) + \bar{\xi} \frac{d^2 \bar{\xi}}{d\tau^2} \right\} = 0. \quad (59)$$

Otrzymaliśmy podobnie jak w poprzednim przypadku liniowe równanie różniczkowe względem funkcji $\bar{S}_r$. Tym razem jednak nieznaną funkcją czasu jest w tym równaniu położenie frontu fali $\bar{\xi}(\tau)$ w zamian za nieznaną funkcję $[\epsilon_v(\bar{\xi})]$ w równaniu opisującym przypadek $\bar{U} = \text{const}$. Rozwiązaniem równania ruchu ośrodka (59) jest następująca funkcja

$$\begin{aligned} \bar{S}_r(\bar{\xi}) = & C \bar{\xi}^{m^*-1} + \frac{\theta_w}{\sin \theta_w} \frac{\bar{\xi}}{2-m^*} - \frac{[\epsilon_v]}{1-m^*} \left\{ \left(\frac{d\bar{\xi}}{d\tau} \right)^2 + \bar{\xi} \frac{d^2 \bar{\xi}}{d\tau^2} \right\} + \\ & + \frac{[\epsilon_v][\epsilon_v]}{1+m^*} \frac{\bar{\xi}^2}{\bar{\xi}^2} \left(\frac{d\bar{\xi}}{d\tau} \right)^2. \end{aligned} \quad (60)$$

W równaniu tym pozostaje nam jeszcze wyznaczyć funkcję $C(\bar{\xi})$ oraz $\bar{\xi}(\tau)$. Korzystamy w tym celu z analogicznych warunków brzegowych, jak w poprzednim przypadku, skąd znajdujemy funkcję $C(\bar{\xi})$:

$$\begin{aligned} C = & - \frac{\theta_w}{\sin \theta_w} \frac{\xi_o^{2-m^*}}{2-m^*} + \frac{[\epsilon_v] \xi_o^{1-m^*}}{1-m^*} \left\{ \left(\frac{d\bar{\xi}}{d\tau} \right)^2 + \bar{\xi} \frac{d^2 \bar{\xi}}{d\tau^2} \right\} + \\ & - [\epsilon_v] [\epsilon_v] \left(\frac{d\bar{\xi}}{d\tau} \right)^2 - \frac{\bar{\xi}^2 \xi_o^{1-m^*}}{1+m^*} \end{aligned} \quad (61)$$

oraz równanie różniczkowe funkcji $\bar{\xi}(\tau)$:

$$\frac{d^2 \bar{\xi}}{d\tau^2} = \frac{1}{\bar{\xi}} \left(\frac{d\bar{\xi}}{d\tau} \right)^2 \left\{ [\varepsilon_v] \frac{1-m^*}{1+m^*} \frac{1 - \left(\frac{\bar{\xi}}{\bar{\xi}_0} \right)^{m^*+1}}{1 - \left(\frac{\bar{\xi}}{\bar{\xi}_0} \right)^{m^*-1}} - \frac{1-m^*}{1 - \left(\frac{\bar{\xi}}{\bar{\xi}_0} \right)^{m^*-1}} - 1 \right\} +$$

$$+ \frac{\theta_w}{\sin \theta_w [\varepsilon_v]} \left\{ \frac{1-m^*}{2-m^*} \frac{1 - \left(\frac{\bar{\xi}}{\bar{\xi}_0} \right)^{m^*-2}}{1 - \left(\frac{\bar{\xi}}{\bar{\xi}_0} \right)^{m^*-1}} - \frac{1-m^*}{2-m^*} \frac{1 - \left(\frac{\bar{\xi}}{\bar{\xi}_0} \right)^{m^*-2}}{1 - \left(\frac{\bar{\xi}}{\bar{\xi}_0} \right)^{m^*-1}} \right\} \quad (62)$$

dla $m^* \neq 1$, $m^* \neq 2$, $m^{**} \neq 2$,

zaś w szczególnych przypadkach otrzymujemy równania:

$$\frac{d^2 \bar{\xi}}{d\tau^2} = \frac{1}{\bar{\xi}} \left(\frac{d\bar{\xi}}{d\tau} \right)^2 \left\{ \frac{[\varepsilon_v]}{2} \frac{1 - \frac{\bar{\xi}^2}{\bar{\xi}_0^2}}{\ln \frac{\bar{\xi}}{\bar{\xi}_0}} - \frac{1}{\ln \frac{\bar{\xi}}{\bar{\xi}_0}} - 1 \right\} +$$

$$+ \frac{\theta_w}{\sin \theta_w [\varepsilon_v] \ln \frac{\bar{\xi}}{\bar{\xi}_0}} \left\{ 1 + \frac{\bar{\xi}_0}{\bar{\xi}} - \frac{1 - (\bar{\xi})^{m^{**}-2}}{2 - m^{**}} \right\}; \quad (63)$$

dla $m^* = 1$, $m^{**} \neq 2$

oraz

$$\frac{d^2 \bar{\xi}}{d\tau^2} = \frac{1}{\bar{\xi}} \left(\frac{d\bar{\xi}}{d\tau} \right)^2 \left\{ - \frac{[\varepsilon_v]}{3} \frac{1 - \frac{\bar{\xi}^3}{\bar{\xi}_0^3}}{1 - \frac{\bar{\xi}}{\bar{\xi}_0}} + \frac{1}{1 - \frac{\bar{\xi}}{\bar{\xi}_0}} - 1 \right\} +$$

$$+ \frac{\theta_w}{\sin \theta_w [\varepsilon_v]} \left\{ \frac{\ln \frac{\bar{\xi}_0}{\bar{\xi}}}{1 - \frac{\bar{\xi}}{\bar{\xi}_0}} + \frac{1 - (\bar{\xi})^{m^{**}-2}}{(2-m^{**})(1 - \frac{\bar{\xi}}{\bar{\xi}_0})} \right\}; \quad (64)$$

dla $m^* = 2$, $m^{**} \neq 2$.

Przypadek $m^{**} = 2$ można otrzymać, podobnie jak poprzednio, po podstawieniu do warunku brzegowego $\bar{S}_r(\bar{\xi} = \bar{\xi})$ naprężenia granicznego wyrażonego związkiem (32).

Porównując uzyskane równania różniczkowe (62), (63) oraz (64) z odpowiednimi równaniami dotyczącymi poprzedniego przypadku stałej

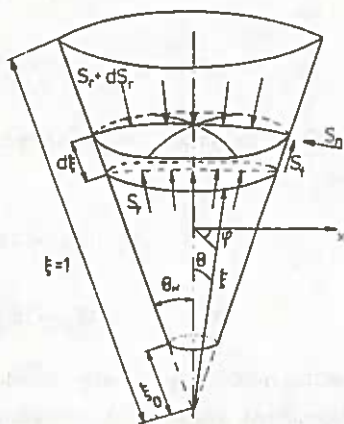
prędkości propagacji zaburzenia, zauważamy bardzo duże formalne podobieństwo równań pomimo istniejącej różnicy rzędu równań różniczkowych.

W celu wyznaczenia wszystkich pozostałych wielkości związanych z propagacją fali, a więc wypływu Q oraz nieciągłości poszczególnych składowych stanu naprężenia na froncie fali korzystamy ze związków (51-56) z tą jednak różnicą, że zamiast uprzednio stałej wartości prędkości $\bar{U}$ podstawiamy teraz pochodną $\frac{d\xi}{d\tau}$, zależną zaś poprzednio od położenia frontu fali nieciągłość odkształcenia objętościowego $[\epsilon_v(\xi)]$ przyjmuje teraz stałą wartość.

Propagacja fali prędkości w kanale stożkowym

Równanie ruchu ośrodka

Do opisu przebiegu procesu w kanale stożkowym stosujemy sferyczny układ współrzędnych przestrzennych (r, θ, φ) oraz czas t . W tak przyjętym układzie współrzędnych elementarną warstwę ośrodka będzie stanowił wycinek kulistej czaszy o grubości $d\xi$, ograniczonej sferycznymi powierzchniami: $\xi = \text{const.}$, $\xi + d\xi = \text{const.}$ oraz powierzchnią boczną stożka $\theta = \theta_w$, jak przedstawiono na rysunku 11. Na osi symetrii zbiornika naprężenie promieniowe σ_r oraz naprężenie obwodowe σ_θ stają się największym i najmniejszym naprężeniem głównym, naprężenie zaś obwodowe σ_φ przyjmujemy, że jest pośrednim naprężeniem głównym. Wyznamy teraz podobnie jak w przypadku kanału klinowego, poszczególne siły wypadkowe działające w kierunku pionowym na elementarny obszar ośrodka. Wypadkowa siła działająca na górną powierzchnię warstwy ośrodka wynosi:



Rys. 11. Siły działające na elementarną warstwę ośrodka w kanale stożkowym

$$F_1 = \int_0^{\theta_w} \int_0^{2\pi} (S_r + dS_r)(\xi + d\xi)^2 \sin\theta \cos\theta d\theta d\varphi. \quad (65)$$

Po wykonaniu całkowania oraz pominięciu wyrazów małych drugiego rzędu otrzymujemy:

$$F_1 = \pi(S_r \xi^2 + 2S_r \xi d\xi + dS_r \xi^2) \sin^2 \theta_w. \quad (66)$$

W analogiczny sposób otrzymujemy siłę działającą na dolną powierzchnię warstwy ośrodka:

$$F_2 = \pi S_r \xi^2 \sin^2 \theta_w. \quad (67)$$

Składową pionową wypadkowego przyrostu siły normalnej i stycznej działających na powierzchnię boczną $\theta = \theta_w$ przedstawiają następujące wyrażenia:

$$dF_3 = 2\pi \xi d\xi S_n \sin^2 \theta_w, \quad (68)$$

$$dF_4 = 2\pi \xi d\xi S_t \sin \theta_w \cos \theta_w, \quad (69)$$

natomiast przyrosty siły masowej i siły bezwładności określają wyrażenia:

$$dF_5 = 2\pi \xi^2 d\xi (1 - \cos \theta_w), \quad (70)$$

$$dF_6 = \pi \xi^2 d\xi a_r \sin^2 \theta_w. \quad (71)$$

Sumując poszczególne siły składowe oraz przyrosty sił, działające na elementarną warstwę, i porządkując uzyskany związek otrzymujemy następujące równanie równowagi statycznej ośrodka:

$$\frac{dS_r}{d\xi} + \frac{2}{\xi} (S_r - S_n - S_t \operatorname{ctg} \theta_w) - \frac{2}{1 + \cos \theta_w} = 0. \quad (72)$$

Na podstawie sformulowanych wcześniej związków (19) i (20) zachodzących między naprężeniami S_r , S_t i S_n oraz korzystając ze stałej m^{**} określonej zależnością (30), równanie (72) zapisujemy w ostatecznej postaci:

$$\frac{dS_r}{d\xi} + 2(1 - m^{**}) \frac{S_r}{\xi} - \frac{2}{1 + \cos\theta_w} = 0. \quad (73)$$

Po scałkowaniu tego równania przy warunku brzegowym $S_r(\xi=1)=0$ otrzymujemy następujący rozkład naprężenia promieniowego wzdłuż wysokości zbiornika stożkowego:

$$S_r(\xi) = - \frac{2\xi}{(3 - 2m^{**})(1 + \cos\theta_w)} \left(\xi^{(2m^{**}-3)} - 1 \right) \text{ dla } m^{**} \neq \frac{3}{2} \quad (74)$$

oraz

$$S_r(\xi) = \frac{2}{1 + \cos\theta_w} \xi \ln \xi \quad \text{dla } m^{**} = \frac{3}{2}. \quad (75)$$

Graniczne zatem wartości naprężenia na froncie fali zapisać można następująco:

$$S_r^+ = - \frac{2\bar{\xi}}{(3 - 2m^{**})(1 + \cos\theta_w)} \left(\bar{\xi}^{(2m^{**}-3)} - 1 \right), m^{**} \neq \frac{3}{2}, \quad (76)$$

$$S_r^- = - \frac{2\bar{\xi}}{(3 - 2m^{**})(1 + \cos\theta_w)} \left(\bar{\xi}^{(2m^{**}-3)} - 1 \right) + \bar{U}^2 [\epsilon_v], m^{**} \neq \frac{3}{2}. \quad (77)$$

Podobnie jak w przypadku kanału klinowego zakładamy, że ruch ośrodka poniżej frontu fali jest promieniowy, nieściśliwy oraz niezależny od współrzędnych kątowych θ i φ . Biorąc przy tym pod uwagę prawo zachowania masy dla przepływu nieściśliwego w kanale stożkowym, otrzymujemy następujące wyrażenie określające poszczególne składowe prędkości ruchu cząstek:

$$v_r(\xi, \tau) = - \frac{C(\tau)}{\xi^2}, \quad v_\theta = 0, \quad v_\varphi = 0, \quad (78)$$

gdzie C jest funkcją tylko czasu τ . Znając wartość graniczną prędkości ruchu cząstek na froncie fali: $V^- = -\bar{U} [\epsilon_v]$, możemy wyznaczyć funkcję $C(\tau)$:

$$C(\tau) = -\bar{U} [\epsilon_v] \bar{\xi}^2, \quad (79)$$

a z tego ogólny związek na prędkość ruchu ośrodka w kanale stożkowym jest następujący:

$$V_r(\xi, \tau) = -\frac{\bar{\xi}^2}{\xi^2} \bar{U} [\epsilon_v], \quad (80)$$

$$\text{dla } \xi_0 \leq \xi < \bar{\xi}(\tau).$$

Analogicznie do rozważań prowadzonych dla zbiornika klinowego stan dynamicznej równowagi elementarnej warstwy ośrodka w zbiorniku stożkowym otrzymamy uwzględniając w ogólnym bilansie działających sił przyrost siły bezwładności wyrażony związkiem (71), co przedstawia poniższe równanie:

$$\frac{d\bar{S}_r}{d\xi} + 2(1 - m^*) \frac{\bar{S}_r}{\xi} - \frac{2}{1 + \cos\theta_w} - a_r(\xi, \tau) = 0, \quad (81)$$

gdzie m^* określono zgodnie z równaniem (36).

Stała prędkość propagacji fali rozluźnienia

Stosując ogólny wzór (41) na przyspieszenie ruchu cząstek znajdujemy dla nieściśliwego ruchu w kanale stożkowym następujące wyrażenie określające przyspieszenie w nieustalonym ruchu cząstek:

$$a_r(\xi, \tau) = -2 \frac{\bar{U}^2 \bar{\xi}^2}{\xi^2} [\epsilon_v] - \bar{U}^2 \frac{\bar{\xi}^2}{\xi^2} \frac{\partial [\epsilon_v]}{\partial \bar{\xi}} - 2 \bar{U}^2 \frac{\bar{\xi}^4}{\xi^5} [\epsilon_v] [\epsilon_v] \quad (82)$$

oraz równanie ruchu ośrodka:

$$\frac{d\bar{S}_r}{d\xi} + 2(1 - m^*) \frac{\bar{S}_r}{\xi} - \frac{2}{1 + \cos\theta_w} + \frac{\bar{U}^2}{\xi^2} \left\{ 2 \bar{\xi}^2 [\epsilon_v] + \bar{\xi}^2 \frac{\partial [\epsilon_v]}{\partial \bar{\xi}} + 2 \frac{\bar{\xi}^4}{\xi^3} [\epsilon_v] [\epsilon_v] \right\} = 0. \quad (83)$$

Rozwiązując otrzymane równanie ruchu względem funkcji $\bar{S}_r$, przy warunku brzegowym $\bar{S}_r(\xi = \xi_0) = 0$, znajdujemy naprężenie $\bar{S}_r$:

$$\begin{aligned} \bar{S}_r(\xi) = & \frac{2\xi \left(1 - \left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)^{2m^* - 3}\right)}{(1 + \cos\theta_w)(3 - 2m^*)} - \frac{\bar{U}^2 \left\{ 2[\varepsilon_v] + \bar{\xi} \frac{\partial[\varepsilon_v]}{\partial \bar{\xi}} \right\}}{1 - 2m^*} \frac{\bar{\xi}}{\xi} \left(1 - \left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)^{2m^* - 1}\right) + \\ & + \frac{\bar{U}^2 [\varepsilon_v] [\varepsilon_v] \bar{\xi}^4}{(m^* + 1) \xi^4} \left(1 - \left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)^{2(m^* + 1)}\right), \quad m^* \neq \frac{1}{2}, \quad m^* \neq \frac{3}{2}. \end{aligned} \quad (84)$$

Równanie określające funkcję $[\varepsilon_v(\bar{\xi})]$ znajdujemy podstawiając do znalezionego wyrażenia na naprężenie (84) warunek brzegowy $\bar{S}_r(\xi = \bar{\xi})$ określony związkiem (77). Po odpowiednich przekształceniach otrzymujemy następujące równanie różniczkowe:

$$\begin{aligned} \frac{d[\varepsilon_v]}{d\bar{\xi}} = & \frac{[\varepsilon_v]}{\bar{\xi}} \left\{ [\varepsilon_v] \frac{1 - 2m^*}{1 + m^*} \frac{1 - \left(\frac{\bar{\xi}}{\xi_0}\right)^{2(m^* + 1)}}{1 - \left(\frac{\bar{\xi}}{\xi_0}\right)^{2m^* - 1}} - \frac{1 - 2m^*}{1 - \left(\frac{\bar{\xi}}{\xi_0}\right)^{2m^* - 1}} - 2 \right\} + \\ & + \frac{2(1 - 2m^*)}{(1 + \cos\theta_w)\bar{U}^2} \left\{ \frac{1}{3 - 2m^*} \frac{1 - \left(\frac{\bar{\xi}}{\xi_0}\right)^{2m^* - 3}}{1 - \left(\frac{\bar{\xi}}{\xi_0}\right)^{2m^* - 1}} - \frac{1 - \left(\frac{\bar{\xi}}{\xi_0}\right)^{2m^* - 3}}{(3 - 2m^*) \left(1 - \left(\frac{\bar{\xi}}{\xi_0}\right)^{2m^* - 1}\right)} \right\} \\ & \text{dla } m^* \neq \frac{1}{2}, \quad m^* \neq \frac{3}{2}, \quad m^{**} \neq \frac{3}{2}. \end{aligned} \quad (85)$$

Otrzymane równanie jest bardzo podobne do równania (48) opisującego przypadek kanału klinowego. Różnice występują jedynie w stałych współczynnikach poszczególnych członów obu równań oraz w wykładnikach potęg. Z tego też powodu nie zamieszczono dalej rozwiązań szczególnych przypadków dla $m^* = \frac{1}{2}$ oraz $m^* = \frac{3}{2}$, gdyż będą one podobne do przedstawionych w poprzednim rozdziale szczególnych rozwiązań dla kanału płaskiego. Rozwiązując numerycznie równanie (85) znajdujemy funkcję $[\varepsilon_v(\bar{\xi})]$, co pozwala nam określić wydatek wypływu ośrodka zgodnie ze wzorem:

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_w} v_r(\xi, \tau) \xi^2 \sin \theta d\theta d\varphi = -2\pi(1 - \cos \theta_w) \bar{\xi}^2 \bar{U}[\varepsilon_v], \quad (86)$$

a także poszczególne składowe skoku naprężenia na froncie fali według związków (56) w sposób analogiczny jak w przypadku kanału klinowego

Stała wartość rozluźnienia na froncie fali

Poszczególne składowe prędkości ruchu cząstek ośrodka poniżej frontu fali wyraża w tym przypadku następujący związek:

$$v_r(\xi, \tau) = -[\varepsilon_v] \frac{\bar{\xi}^2}{\xi^2} \frac{d\bar{\xi}}{d\tau}, \quad v_\theta = 0, \quad v_\varphi = 0 \quad \text{dla } \xi_0 \leq \xi < \bar{\xi}(\tau), \quad (87)$$

gdzie $[\varepsilon_v]$ jest stałe, pochodna zaś $\frac{d\bar{\xi}}{d\tau}$ będąca prędkością propagacji fali $\bar{U}$ jest funkcją położenia $\bar{\xi}$. Zgodnie z ogólnym wzorem (41) znajdujemy przyspieszenie cząstek w nieustalonym, nieściśliwym ruchu cząstek w kanale stożkowym:

$$a_r(\xi, \tau) = -\frac{2[\varepsilon_v]\bar{\xi}}{\xi^2} \left(\frac{d\bar{\xi}}{d\tau}\right)^2 - [\varepsilon_v] \frac{\bar{\xi}^2}{\xi^2} \frac{d^2\bar{\xi}}{d\tau^2} - \frac{2[\varepsilon_v][\varepsilon_v]\bar{\xi}^4}{\xi^5} \left(\frac{d\bar{\xi}}{d\tau}\right)^2, \quad (88)$$

a następnie równanie ruchu ośrodka:

$$\frac{d\bar{S}_r}{d\bar{\xi}} + 2(1-m^*) \frac{\bar{S}_r}{\bar{\xi}} - \frac{2}{1+\cos\theta_w} + \frac{[\varepsilon_v]}{\bar{\xi}^2} \left\{ 2\bar{\xi} \left(\frac{d\bar{\xi}}{d\tau}\right)^2 \left(1 + [\varepsilon_v] \frac{\bar{\xi}^3}{\xi^3}\right) + \bar{\xi}^2 \frac{d^2\bar{\xi}}{d\tau^2} \right\} = 0. \quad (89)$$

W analogiczny sposób jak w poprzednim przypadku znajdujemy rozwiązanie równania ruchu ośrodka przy warunku brzegowym $\bar{S}_r(\xi = \xi_0) = 0$

w postaci funkcji:

$$\begin{aligned} \bar{S}_r(\xi) = & \frac{2\bar{\xi} \left(1 - \left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)^{2m^*-3}\right)}{(1+\cos\theta_w)(3-2m^*)} - \frac{[\varepsilon_v] \left\{ 2\left(\frac{d\bar{\xi}}{d\tau}\right)^2 + \bar{\xi} \frac{d^2\bar{\xi}}{d\tau^2} \right\}}{1-2m^*} \frac{\bar{\xi}}{\xi} \left(1 - \left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)^{2m^*-1}\right) + \\ & + \frac{[\varepsilon_v][\varepsilon_v]\bar{\xi}^4}{(m^*+1)\xi^4} \left(\frac{d\bar{\xi}}{d\tau}\right)^2 \left(1 - \left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)^{2(m^*+1)}\right)^{m^* \neq \frac{1}{2}, m^* \neq \frac{3}{2}}. \end{aligned} \quad (90)$$

Podstawiając warunek brzegowy $\bar{S}_r(\xi=\bar{\xi})$ wyrażony związkiem (77) do otrzymanego rozwiązania równania ruchu ośrodka (90) znajdujemy różniczkowe równanie funkcji $\bar{\xi}(\tau)$:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{\xi}}{d\tau^2} = \frac{1}{\bar{\xi}} \left(\frac{d\bar{\xi}}{d\tau} \right)^2 \left\{ [\varepsilon_v] \frac{1-2m^*}{1+m^*} \frac{1 - \left(\frac{\bar{\xi}}{\xi_0} \right)^{2(m^*+1)}}{1 - \left(\frac{\bar{\xi}}{\xi_0} \right)^{2m^*-1}} - \frac{1 - 2m^*}{1 - \left(\frac{\bar{\xi}}{\xi_0} \right)^{2m^*-1}} - 2 \right\} + \\ + \frac{2(1-2m^*)}{(1+\cos\theta_w) [\varepsilon_v]} \left\{ \frac{1}{3-2m^*} \frac{1 - \left(\frac{\bar{\xi}}{\xi_0} \right)^{2m^*-3}}{1 - \left(\frac{\bar{\xi}}{\xi_0} \right)^{2m^*-1}} - \frac{1 - (\bar{\xi})^{2m^*-3}}{(3-2m^*) \left(1 - \left(\frac{\bar{\xi}}{\xi_0} \right)^{2m^*-1} \right)} \right\} \end{aligned}$$

$$m^* \neq \frac{1}{2}, m^* \neq \frac{3}{2}, m^{**} \neq \frac{3}{2}. \quad (91)$$

Rozwiązując numerycznie uzyskane równanie znajdujemy funkcję $\bar{\xi}(\tau)$, czyli położenie frontu fali w funkcji czasu. Znajomość funkcji $\bar{\xi}(\tau)$ pozwala wyznaczyć wydatek wypływu Q zgodnie z równaniem (86) oraz składowe skoku naprężenia na froncie fali według związków (56). Różnica w wykorzystaniu wymienionych równań w stosunku do przypadku $\bar{U}=\text{const.}$ polega na tym, że w miejsce uprzednio stałej wartości $\bar{U}$ podstawiamy teraz pochodną $\frac{d\bar{\xi}}{d\tau}$, nieciągłość odkształcenia objętościowego zaś przyjmuje stałą wartość.

Propagacja fali w zbiorniku stożkowo-cylindrycznym

Opis procesu propagacji fali rozluźnienia w zbiorniku stożkowo-cylindrycznym rozważać będziemy w sposób analogiczny jak w poprzednich przypadkach. Ponieważ teraz zbiornik składa się z dwóch geometrycznie różnych części: stożkowej i cylindrycznej, do opisu postawionego problemu zastosujemy zatem dwa niezależne układy współrzędnych przestrzennych: sferyczny (ξ, θ, φ) do opisu przebiegu procesu w części stożkowej, oraz pionową oś x do opisu procesu w cylindrycznej części zbiornika. Wszystkie obliczenia prowadzone będą nadal w jednostkach bezwy-

miarowych, przy czym jednostką długości pozostaje, jak poprzednio, maksymalny promień części stożkowej - b . Zgodnie z tą umową wprowadzamy następujące wielkości bezwymiarowe dotyczące części cylindrycznej:

- maksymalna wysokość ośrodka w części cylindrycznej $\chi_0 = \frac{X_0}{b}$,
- współrzędna wysokości $\chi = \frac{x}{b}$,
- aktualne położenie frontu fali rozluźnienia $\bar{\chi} = \frac{Y(t)}{b}$,
- promień części cylindrycznej $R = \frac{b \sin \theta_w}{b} = \sin \theta_w$,

gdzie X_0 oznacza wysokość warstwy ośrodka w cylindrycznej części zbiornika, $b \cdot \sin \theta_w$ zaś oznacza jej promień. Pozostałe wielkości bezwymiarowe wprowadzone w rozdziale pt. Równanie ruchu... nie ulegają zmianie.

Sformułowanie zagadnienia będzie teraz polegało na ułożeniu równań ruchu oddzielnie w części stożkowej, oddzielnie w części cylindrycznej oraz na przyjęciu odpowiednich warunków ciągłości naprężenia i prędkości w obszarze przejściowym między komorą cylindryczną a stożkowym lejem. W celu uzyskania przestrzennie jednowymiarowego równania ruchu ośrodka zakładamy, że poniżej frontu rozluźnienia ruch ośrodka jest sztywny w części cylindrycznej, promieniowy i nieściśliwy zaś w części stożkowej. Przyjmujemy ponadto uproszczone warunki ciągłości naprężenia i prędkości w miejscu połączenia części stożkowej i cylindrycznej:

$$\begin{aligned} S_r(\xi = 1, \tau) &= S_x(\chi = 0, \tau), \\ V_r(\xi = 1, \tau) &= V_x(\chi = 0, \tau). \end{aligned} \quad (92)$$

Rozwiązanie zagadnienia wygodnie jest podzielić na dwa etapy:

1. Fala rozluźnienia biegnie przez część stożkową, ośrodek zgromadzony zaś w części cylindrycznej jest jeszcze w stanie równowagi statycznej.

2. Fala rozluźnienia biegnie wzdłuż części cylindrycznej, w stożkowym zaś leju ruch ośrodka jest promieniowy i nieściśliwy.

Pierwszy etap rozwiązania redukuje się do analizowanego już w rozdziale pt. Propagacja fali... zagadnienia przejścia fali przez kanał stożkowy, przy zmienionym warunku brzegowym na górnej powierzchni.

W poprzednim rozdziale przyjmowaliśmy warunek swobodnej górnej powierzchni materiału w stożku, tzn. $S_r(\xi=1)=0$. Teraz natomiast nacisk na górną powierzchnię ośrodka w leju stożkowym jest określony przez stan naprężenia panujący w cylindrycznej części zbiornika. Naprężenie to znajdujemy rozważając siły działające na elementarny obszar ośrodka w kształcie walcowej warstwy o grubości $d\chi$, jak pokazano na rysunku 12. Otrzymujemy w efekcie różniczkowe równanie równowagi statycznej:

$$\frac{dS_x}{d\chi} - \frac{2M^{**}}{R} S_x - 1 = 0, \quad (93)$$

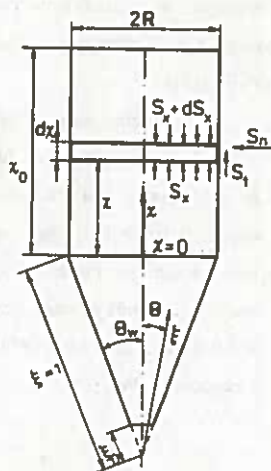
gdzie M^{**} oznacza stosunek naprężenia stycznego S_t do naprężenia S_x zgodnie ze wzorem (20). Rozwiązaniem tego równania przy założonym warunku swobodnej górnej powierzchni ośrodka w zbiorniku (tzn. $S_x(\chi=\chi_0)=0$) jest następująca funkcja:

$$S_x = \frac{R}{2M^{**}} (\exp(-\frac{2M^{**}}{R}(\chi-\chi_0)) - 1); \quad M^{**} \neq 0, \quad (94)$$

kotóra w szczególnym przypadku $\chi = 0$ daje następujące wyrażenie na wartość nacisku ośrodka zgromadzonego w części cylindrycznej zbiornika na ośrodek w leju:

$$S_x(\chi=0) = \frac{R}{2M^{**}} (\exp(-\frac{2M^{**}}{R}\chi_0) - 1). \quad (95)$$

W celu uzyskania efektywnego rozwiązania zagadnienia należy znaleziony nacisk części cylindrycznej zbiornika zastosować jako warunek brzegowy w równaniu (73) oraz kontynuować tok obliczeń według rozważań przedstawionych w rozdziale pt. Propagacja fali... Rozwiązania te zostały po-



Rys. 12. Elementarna warstwa ośrodka w zbiorniku stożkowo-cylindrycznym

minięte w niniejszym rozdziale z uwagi na fakt, że nie wnoszą one żadnych jakościowych zmian do równań już przedstawionych w poprzednim rozdziale.

W drugim etapie fala rozluźnienia biegnąca wzdłuż cylindrycznej części zbiornika jest falą płaską, tzn. czołem jej jest powierzchnia koła wycięta z płaszczyzny $\bar{\chi} = \text{const}$. Podobnie jak w poprzednich rozwiązaniach przyjmujemy, że rozluźnienie ośrodka występuje tylko na froncie fali, a zatem ruch ośrodka poniżej frontu fali jest ruchem sztywnym w części cylindrycznej oraz ruchem promieniowym, nieściśliwym w części stożkowej. Graniczne wartości naprężenia na froncie fali znajdujemy z równania (94):

$$S_x^+ = \frac{R}{2M^{**}} \left(\exp\left(\frac{2M^{**}}{R} (\bar{\chi} - \chi_0)\right) - 1 \right), \quad (96)$$

$$\bar{S}_x^- = \frac{R}{2M^{**}} \left(\exp\left(\frac{2M^{**}}{R} (\bar{\chi} - \chi_0)\right) - 1 \right) + \bar{U}^2 [\epsilon_v]. \quad (97)$$

Graniczna wartość prędkości ruchu cząstek bezpośrednio poniżej frontu fali związana jest z prędkością propagacji fali następującą zależnością:

$$v_x^-(\tau) = - \bar{U} [\epsilon_v(\tau)]. \quad (98)$$

Jest to równocześnie prędkość sztywnego ruchu ośrodka w części cylindrycznej. Biorąc pod uwagę warunek ciągłości prędkości (92), możemy w następujący sposób wyrazić prędkość promieniowego ruchu ośrodka w stożkowym leju:

$$v_r(\xi, \tau) = - \frac{\bar{U} [\epsilon_v(\tau)]}{\xi^2}. \quad (99)$$

Przyspieszenie w nieustalonym ruchu ośrodka wyrazi się w związku z tym następująco:

$$a_x(\tau) = - \bar{U}^2 \frac{\partial [\epsilon_v]}{\partial \bar{\chi}} \quad \text{dla cylindra} \quad (100)$$

oraz

$$a_r(\xi, \tau) = - \frac{\bar{U}^2}{\xi^2} \left\{ \frac{\partial [\epsilon_v]}{\partial \bar{\chi}} + 2 \frac{[\epsilon_v] [\epsilon_v]}{\xi^3} \right\} \quad \text{dla stożka.} \quad (101)$$

Równanie dynamicznej równowagi ośrodka poniżej frontu fali ma teraz postać:

$$\frac{d\bar{S}_x}{d\bar{\chi}} - \frac{2M^*}{R} \bar{S}_x - 1 + \bar{U}^2 \frac{\partial[\epsilon_v]}{\partial\bar{\chi}} = 0 \text{ dla cylindra} \quad (102)$$

oraz

$$\frac{d\bar{S}_r}{d\xi} + 2(1-m^*) \frac{\bar{S}_r}{\xi} - \frac{2}{1-\cos\theta_w} + \frac{\bar{U}^2}{\xi^2} \left\{ \frac{\partial[\epsilon_v]}{\partial\bar{\chi}} + 2 \frac{[\epsilon_v][\epsilon_v]}{\xi^3} \right\} = 0$$

dla stożka. (103)

Każde z tych równań można rozwiązać oddzielnie. Warunkiem brzegowym na górnej powierzchni ruchomego ośrodka w części cylindrycznej jest graniczna wartość naprężenia $\bar{S}_x$ wyrażona związkiem (97). Dla części stożkowej przyjmujemy swobodną powierzchnię wylotu zbiornika, tzn. $\bar{S}_r(\xi = \xi_0) = 0$. Warunkiem brzegowym na górnej powierzchni w obszarze stożka i dolnej w obszarze cylindra jest przedstawiony wcześniej warunek ciągłości naprężenia (92). Rozwiązując równania ruchu ośrodka (102) oraz (103) przy zadanych warunkach brzegowych znajdujemy dwa wyrażenia określające naprężenie w części cylindrycznej i stożkowej zbiornika:

$$\begin{aligned} \bar{S}_x = & \exp\left(\frac{2M^*}{R}(\chi - \bar{\chi})\right) \left\{ \frac{R}{2M^*} (\exp(\frac{2M^*}{R}(\bar{\chi} - \chi_0)) - 1) + \bar{U}^2 [\epsilon_v] \right\} + \\ & + (1 - \bar{U}^2 \frac{\partial[\epsilon_v]}{\partial\bar{\chi}}) \frac{R}{2M^*} (\exp(\frac{2M^*}{R}(\chi - \bar{\chi})) - 1) \text{ dla cylindra} \end{aligned} \quad (104)$$

oraz

$$\begin{aligned} \bar{S}_r(\xi) = & \frac{2\xi \left(1 - (\frac{\xi}{\xi_0})^{2m^*-3}\right)}{(1+\cos\theta_w)(3-2m^*)} - \frac{\bar{U}^2 \frac{\partial[\epsilon_v]}{\partial\bar{\chi}}}{(1-2m^*)\xi} \left(1 - (\frac{\xi}{\xi_0})^{2m^*-1}\right) + \\ & + \frac{\bar{U}^2 [\epsilon_v][\epsilon_v]}{(m^*+1)\xi^4} \left(1 - (\frac{\xi}{\xi_0})^{2(m^*+1)}\right) \text{ dla stożka.} \end{aligned} \quad (105)$$

Nakładając warunek ciągłości naprężenia w obszarze złączenia stożka z cylindrem znajdujemy ostateczne równanie wiążące funkcję $[\epsilon_v(\bar{\chi})]$:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial [\epsilon_v]}{\partial \bar{\lambda}} \left\{ \frac{\bar{U}^2 R}{2M^{**}} (\exp(-\frac{2M^{**}}{R} \bar{\lambda}) - 1) - \frac{\bar{U}^2}{1-2m^{**}} (1 - \xi_0^{1-2m^{**}}) \right\} - [\epsilon_v] \bar{U}^2 \exp(-\frac{2M^{**}}{R} \bar{\lambda}) \\
& + [\epsilon_v] [\epsilon_v] \frac{\bar{U}^2}{m^{**}+1} (1 - \xi_0^{-2(m^{**}+1)}) = \frac{R}{2M^{**}} \frac{\exp(\frac{2M^{**}}{R} (\bar{\lambda} - \lambda_0)) - 1}{\exp \frac{2M^{**}}{R} \bar{\lambda}} + \\
& + \frac{R}{2M^{**}} (\exp(-\frac{2M^{**}}{R} \bar{\lambda}) - 1) - \frac{2(1 - \xi_0^{3-2m^{**}})}{(1+\cos\theta_w)(3-2m^{**})} . \quad (106)
\end{aligned}$$

Otrzymaliśmy w efekcie nieliniowe równanie różniczkowe pierwszego rzędu, które - podobnie jak poprzednio - można rozwiązać jedynie metodami numerycznymi. Otrzymane równanie różniczkowe w porównaniu z analogicznym równaniem (85), dotyczącym tylko kanału stożkowego, wnosi zmiany wynikające z przyjęcia innych warunków brzegowych analizowanego zagadnienia, charakter procesu zaś, opisywanego przez to równanie, pozostaje niezmienny.

PRZYKŁADY ROZWIĄZAŃ NUMERYCZNYCH I DYSKUSJA O WYNIKACH

Do efektywnego rozwiązania wyprowadzonych w poprzednich rozdziałach nieliniowych równaniach różniczkowych zastosowano standardową metodę numeryczną Runge-Kutta oraz skorzystano z gotowych procedur obliczeniowych. Zgodnie z wprowadzoną w rozdziale Równanie ruchu... zmiennych wszystkie obliczenia prowadzone były w jednostkach bezwymiarowych odniesionych do maksymalnego wymiaru części zbieżnej zbiornika b. Wszystkie z omawianych równań różniczkowych posiadają dla wartości zmiennej $\bar{\xi} = \xi_0$, czyli w chwili rozpoczynania procesu wypływu punkt osobliwy, gdyż ich prawe strony stają się nieoznaczonością postaci $\frac{0}{0}$. Fizycznie oznacza to, że w chwili otwarcia wylotu zbiornika maksymalny skok naprężenia $[S_r]$ działa na warstwę ośrodka o zerowej grubości $\bar{\xi} - \xi_0 = 0$, a zatem jak wynika z prawa zachowania pędu prędkość ruchu cząstek powinna chwilowo zmierzać do ∞ , jak również skok $[\epsilon_v]$ będzie w granicy zmierzał do ∞ dla $\tau = 0$. W rzeczywistości nigdy nie istnieje taka graniczna sytuacja ze względu na skończoną grubość

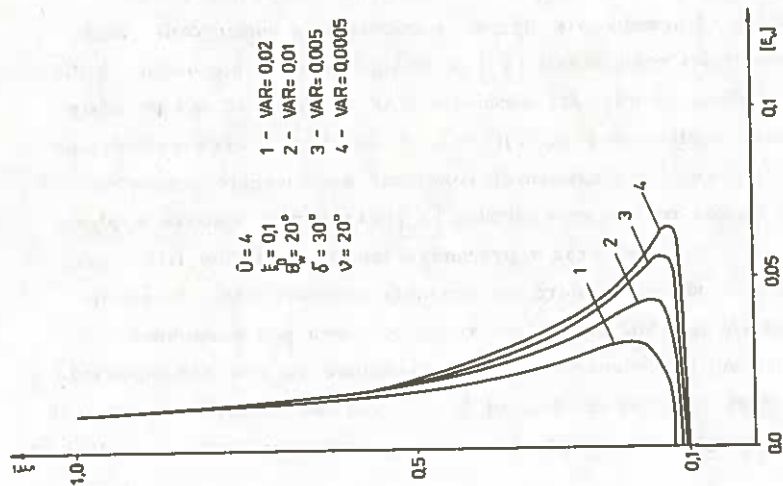
elementarnej warstwy ośrodka rozpoczynającej ruch, co wynika chociażby z ziarnistej struktury ośrodka rozdrobnionego. Uwzględniając rzeczywiste warunki procesu przyjęto w dalszych obliczeniach numerycznych, że w chwili początkowej $\tau = 0$ ruch rozpoczyna warstwa ośrodka o skończonej grubości $\Delta \xi$, którą oznaczono symbolem VAR. Zgodnie z tym warunki początkowe procesu są następujące: $\tau = 0$, $\bar{\xi} = \xi_0 + \text{VAR}$, $V_r = 0$, $S_r(\xi - \xi_0) = 0$.

Kanał klinowy

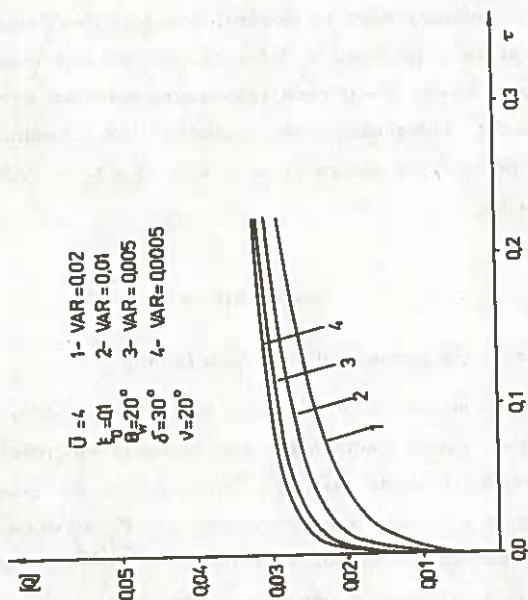
Stała prędkość propagacji fali rozluźnienia

Rozwiązano numerycznie równanie różniczkowe (48), uzyskując w efekcie wartość skoku nieciągłości odkształcenia objętościowego $[E_v]$ w funkcji położenia frontu fali $\bar{\xi}$. Opierając się na związku (51), obliczono następnie wartość wydatku wypływu Q . Podstawiając otrzymane wartości rozluźnienia $[E_v]$ oraz pochodnej $\frac{d[E_v]}{d\bar{\xi}}$ do równania (47), wyznaczono stan naprężenia w ośrodku poniżej frontu fali rozluźnienia w wybranych chwilach czasu τ . Powyżej frontu rozluźnienia stan naprężenia określa analityczny związek (31). W pierwszej kolejności zbadano wpływ parametru VAR, czyli początkowej grubości warstwy ośrodka rozpoczynającej ruch w chwili $\tau = 0$, na uzyskane rozwiązania.

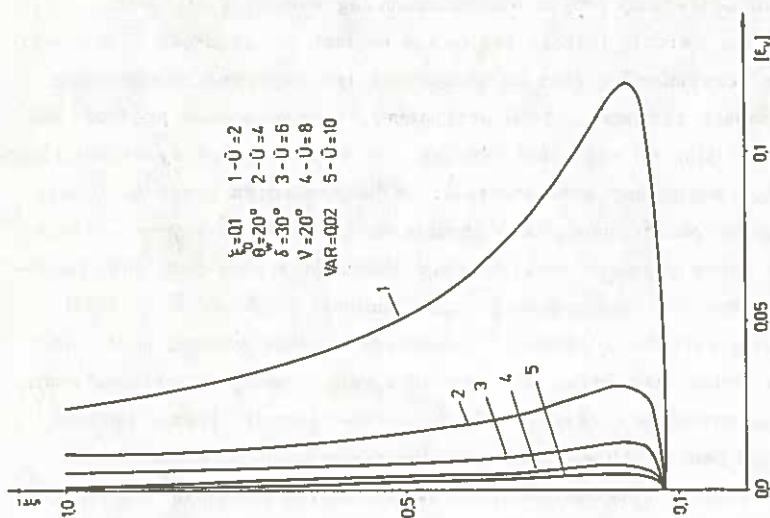
Rysunek 13 przedstawia otrzymane rozwiązanie numeryczne, czyli skok nieciągłości rozluźnienia $[E_v]$ w funkcji zmiennej niezależnej $\bar{\xi}$ dla czterech wybranych wartości parametru VAR, rysunek 14 zaś przedstawia wydatek wypływu Q w funkcji czasu τ dla tych samych wartości parametru. Jak widać z otrzymanych rozwiązań zmniejszenie parametru VAR powoduje wzrost rozluźnienia ośrodka $[E_v]$ oraz wzrost wydatku wypływu Q . Różnice te zanikają wraz z przemieszczaniem się frontu fali w górę zbiornika oraz maleją w miarę zmniejszania wartości VAR. Parametr VAR może być dowolnie mały, lecz różny od zera pod warunkiem, że w zastosowanej procedurze numerycznej przyjmie się również odpowiednio mały krok zmiennej niezależnej $\bar{\xi}$. Ze względu na szybkość dalszych obliczeń numerycznych za optymalny przyjęto parametr VAR równy 0,01.



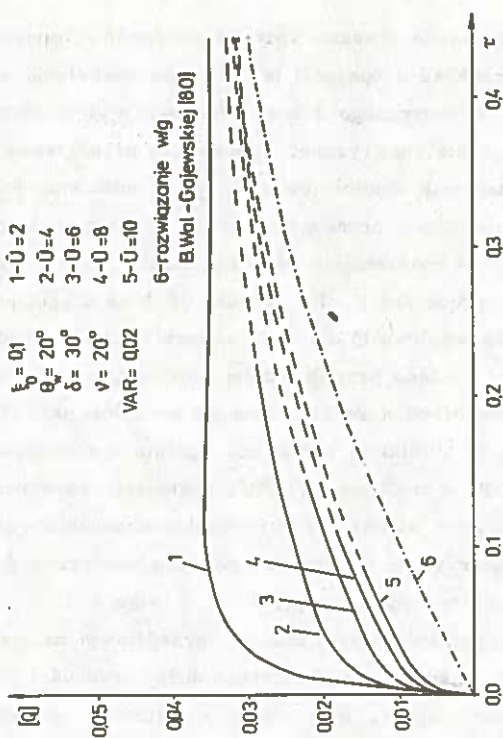
Rys. 13. Zależność skoku odkształcenia obłętościowego $[\xi]$ od parametru VAR dla kanału klinowego



Rys. 14. Wpływ parametru VAR na wydłek wypływu Q z kanału klinowego



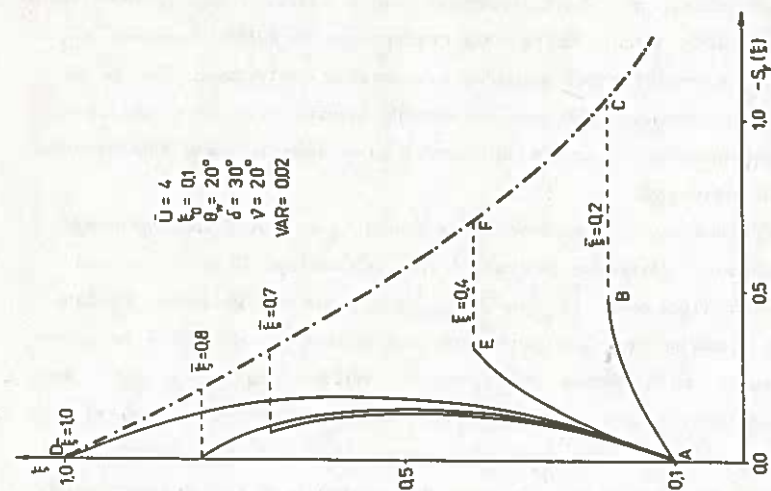
Rys. 15. Wpływ prędkości $\bar{U}$ na wartość nieciągłości $[\epsilon_v]$ w kanale klinowym



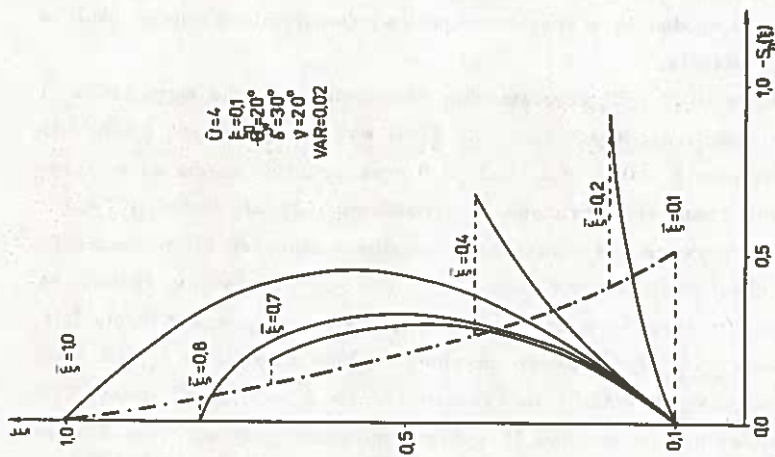
Rys. 16. Wpływ prędkości fali $\bar{U}$ na wartość wydatku wypływu Q z kanału klinowego

Następnie zbadano wpływ poszczególnych parametrów wypływu ośrodka: prędkość propagacji fali $\bar{U}$, kąta nachylenia ścian bocznych θ_w , kąta tarcia wewnętrznego δ oraz promienia wylotu zbiornika ξ_0 na otrzymane rozwiązania numeryczne. Rysunek 15 przedstawia zależność nieciągłości odkształcenia objętościowego $[\epsilon_v]$ od położenia frontu fali dla pięciu wartości prędkości propagacji fali U . Z porównania otrzymanych krzywych widać, że rozluźnienie ośrodka wzrasta coraz szybciej w miarę zmniejszania prędkości $\bar{U}$. Na rysunku 16 linia ciągła przedstawia wyliczony wydatek wypływu Q dla tych samych wartości prędkości $\bar{U}$. Linie przerywane, będące przedłużeniem linii ciągłych, przedstawiają kontynuację wypływu ośrodka ze zbiornika po przejściu fali rozluźnienia przez cały zbiornik. Wyniki te otrzymano zgodnie z rozwiązaniem zaproponowanym przez B. Wol-Gajewską /80/, nakładając każdorazowo początkowe warunki brzegowe wynikające z rozwiązania początkowej fazy wypływu. Z omawianego rysunku wynika, że ze wzrostem prędkości propagacji zaburzenia maleje wydatek wypływu Q , a więc wolniej osiągany jest stan stacjonarnego wypływu. Linia -.- przedstawia na tym samym rysunku graniczny przypadek nieskończenie dużej prędkości propagacji fali, co praktycznie oznacza, że w chwili początkowej cały ośrodek w zbiorniku rozpoczyna wypływ jednocześnie. Jest to w rzeczywistości rozwiązanie B. Wol-Gajewskiej /80/ z warunkiem brzegowym $V_r(r=0) = 0$.

Warto zwrócić jeszcze raz uwagę na fakt, że prędkość $\bar{U}$ jest wielkością bezwymiarową oraz na związaną z tym poprawną interpretację otrzymanych rozwiązań. Jeśli przyjmiemy, że rzeczywista prędkość fali $\bar{U}$ zależy tylko od własności ośrodka, nie zależy zaś od wysokości zbiornika b , otrzymujemy automatycznie, że bezwymiarowa prędkość $\bar{U}$ jest funkcją wysokości zbiornika b zgodnie ze związkiem $\bar{U} = \frac{U}{\sqrt{bg}}$. Zwiększając zatem rozmiary rzeczywistego zbiornika n razy przy niezmiennych prędkości U otrzymujemy $\sqrt{n}$ razy mniejszą prędkość $\bar{U}$. Z kolei mniejszej wartości prędkości $\bar{U}$ odpowiada większa wartość rozluźnienia na froncie fali (rys. 15). Jest to zgodne z naszymi oczekiwaniami, gdyż ze wzrostem rzeczywistych rozmiarów zbiornika rośnie wartość naprężeń panujących wewnątrz ośrodka, co z kolei prowadzi do większego zagęszczenia ośrodka. W chwili otwarcia zbiornika skok naprę-



Rys. 17. Rozkład naprężenia S_n wzdłuż wysokości kanału dla wybranych położań frontu fali ξ

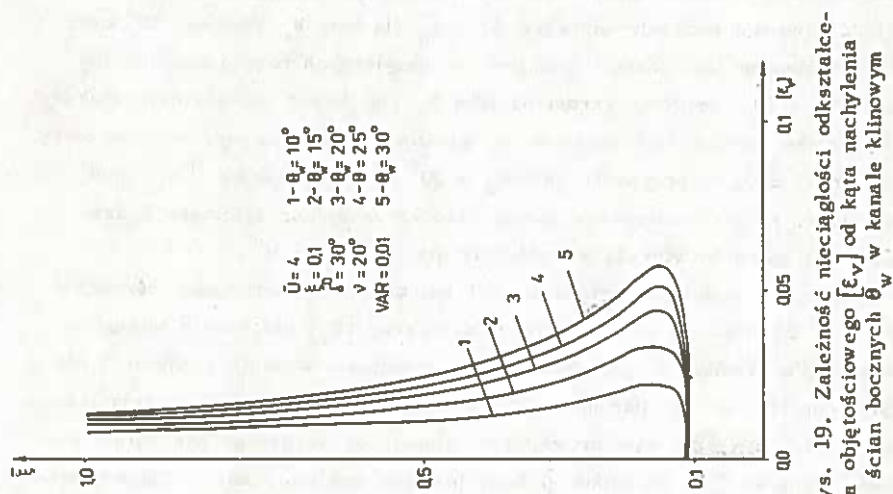


Rys. 18. Rozkład naprężenia normalnego S_n wzdłuż wysokości kanału klinowego dla wybranych położań frontu fali ξ

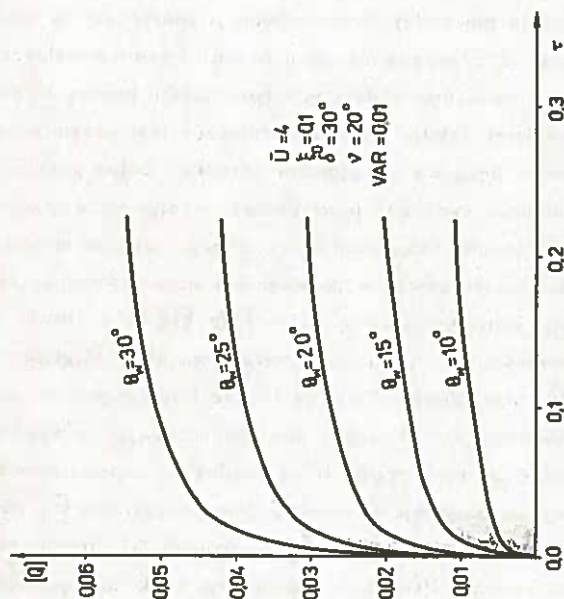
żenia na froncie fali będzie większy w większym zbiorniku, a zatem i skok rozluźnienia $[\varepsilon_v]$ powinien być odpowiednio większy. Przedstawione rozwiązania modelowe prowadzone w jednostkach bezwymiarowych jakościowo zgodne są z konsekwencjami wynikającymi ze zmiany skali badanego obiektu.

Rysunki 17 i 18 przedstawiają odpowiednio rozkład naprężeń S_r i S_n w funkcji wysokości zbiornika ξ dla wybranych położań frontu fali rozluźnienia $\bar{\xi} = 0,2, 0,4, 0,7, 0,8$ oraz 1. Linie ciągłe na tych rysunkach oznaczają naprężenia w ośrodku poniżej fali dylatacji $\xi < \bar{\xi}$, linie przerywane zaś oznaczają nieciągłości naprężeń dla poszczególnych chwilowych położań czoła fali. Linia -.- przedstawia rozkład naprężenia w ośrodku w stanie równowagi statycznej powyżej frontu fali dylatacji $\xi > \bar{\xi}$. Przykładowo chwilowy rozkład naprężenia S_r dla $\bar{\xi} = 0,2$ reprezentuje linia ABCD na rysunku 17, dla $\bar{\xi} = 0,4$ zaś linia AEFD. Przedstawiony na rysunku 17 wykres naprężenia poniżej czoła fali jest w rzeczywistości naprężeniem średnim $\bar{S}_r$ zgodnie ze wzorem (22). Chcąc odtworzyć skrajne wartości naprężenia S_r na osi symetrii zbiornika oraz przy ścianie należy skorzystać ze związków (53). Analizując uzyskane wykresy rozkładu naprężenia widzimy, że nagłemu obniżeniu wartości naprężenia S_r na froncie fali towarzyszy wzrost naprężenia normalnego S_n . Z praktycznego punktu widzenia szczególnie istotny jest chwilowy wzrost naprężenia normalnego do ścian zbiornika S_n , powyżej wartości odpowiadającej równowadze statycznej. Nacisk ten maleje po przejściu fali przez zbiornik, jednakże w pierwszej chwili procesu przewyższa on (w niektórych przypadkach nawet kilkakrotnie) nacisk statyczny.

Z omawianych rysunków widać ponadto, że dla $\bar{\xi}$ zmierzającego do 1 naprężenie statyczne powyżej frontu fali maleje do zera, podczas gdy skok naprężenia $[S_r] = \bar{U}^2[\varepsilon_v]$ nigdy nie osiąga zera, zgodnie zatem z równaniem (34) graniczne naprężenie $\bar{S}_r$ działające na rozpoczynający ruch ośrodek dla pewnych wartości $\bar{\xi}$ zmieniloby znak, stając się naprężeniem rozciągającym. Jednakże naprężenia rozciągające nie mogą istnieć ze względu na założony brak spójności ośrodka. Wobec tego na froncie fali nie może być spełniony w tym przypadku równo-



rys. 19. Zależność nieciągłości odkształce-
nia objętościowego $[\epsilon_v]$ od kąta nachylenia
ścian bocznych θ_w w kanale klinowym

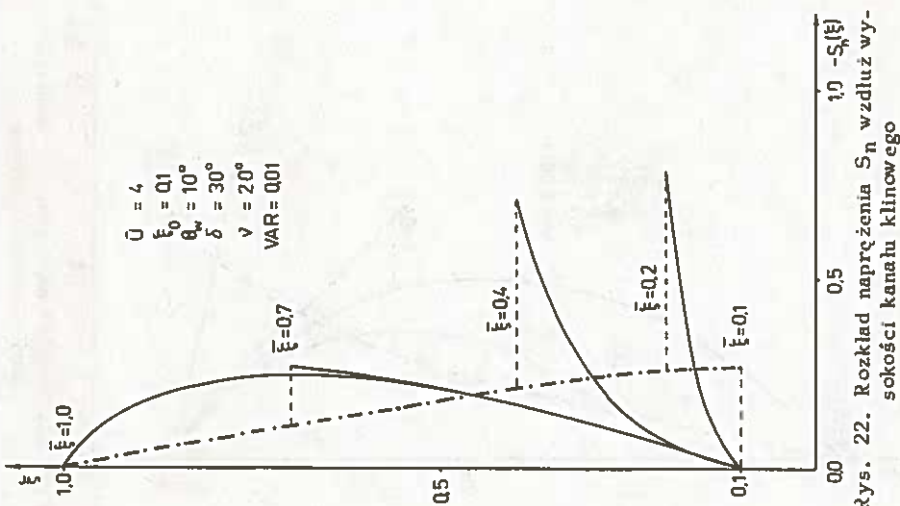
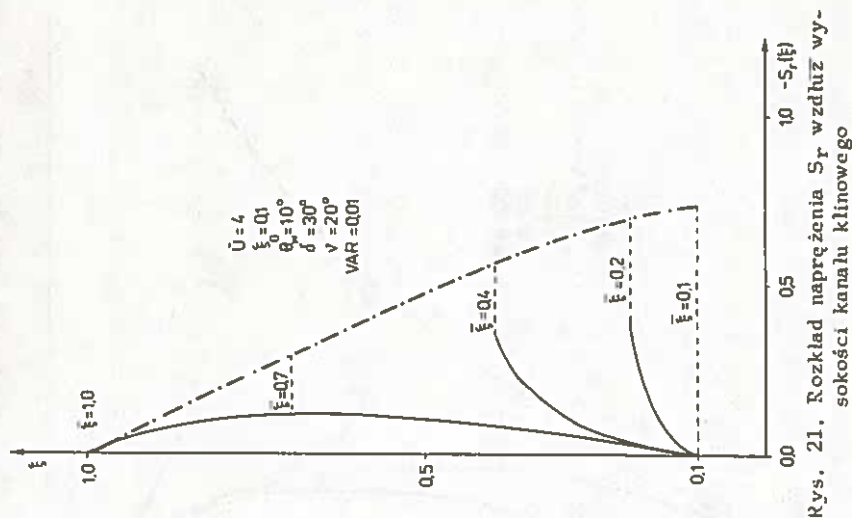


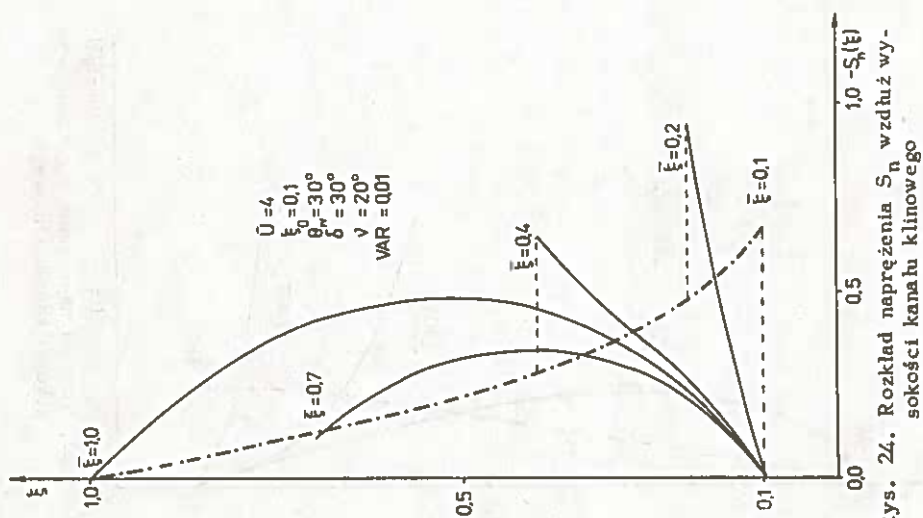
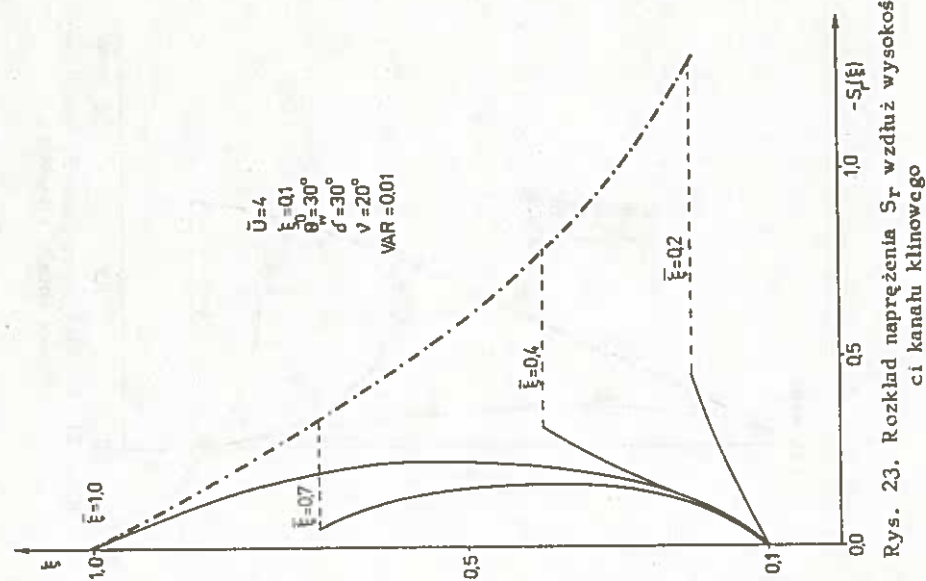
Rys. 20. Zależność wydatku wypływu Q od kąta
nachylenia ścian bocznych θ_w w kanale klinowym

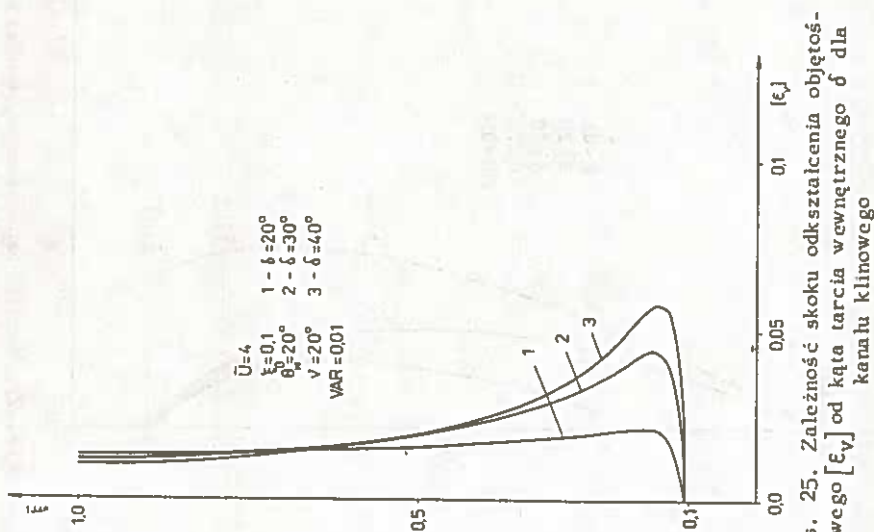
częśnie warunek ciągłości ośrodka oraz prawo zachowania pędu. W celu rozstrzygnięcia powstałej niekonsekwencji oparto się na przesłankach doświadczalnych. Z przeprowadzonych badań eksperymentalnych, które zostaną dokładniej omówione w dalszych rozdziałach pracy, wynika, że w pewnych przypadkach bardzo wyraźnie widoczna jest przemieszczająca się w górę zbiornika przerwa w ciągłości ośrodka. Dolną granicę tej przerwy stanowi chwilowa swobodna powierzchnia wypływającego ośrodka, górną granicę zaś stanowi sklepienie nieruchomego jeszcze materiału. Uzasadnione zatem będzie przyjęcie w rozważanym modelu warunku brzegowego zmodyfikowanego w następujący sposób: $\bar{S}_r^-(\xi = \bar{\xi}) \leq 0$, z chwilą zaś, gdy $\bar{S}_r^-$ osiągnie wartość zero naruszony zostaje warunek ciągłości ośrodka na froncie fali rozluźnienia. Oznacza to, że istniejący skok naprężenia $[S_r]$ nie jest wystarczający do tego, aby rozpoczynającym wypływ cząstkom ośrodka nadać od razu prędkość niezbędną do zapewnienia ciągłego wypływu. Sytuację tę ilustruje rysunek 17, na którym dla $\bar{\xi}$, należącego do przedziału $(0.8, 1)$ naprężenie $\bar{S}_r$ na froncie fali przybiera wartość 0.

Kolejne rysunki 19 i 20 przedstawiają skok nieciągłości $[\epsilon_v]$ oraz wydatek wypływu Q dla pięciu wartości kąta nachylenia ścian bocznych zbiornika θ_w . Z porównania otrzymanych rozwiązań widać, że ze wzrostem kąta θ_w rośnie wielkość skoku $[\epsilon_v]$, co znajduje również swe odbicie we wzroście wydatku wypływu przedstawionym na rysunku 20. Rysunki 21-24 ilustrują rozkłady naprężeń S_r i S_n dla kąta θ_w równego 10° oraz 30° . Widoczna jest różnica ilościowa w otrzymanych rozwiązaniach. Dla kąta $\theta_w = 10^\circ$ chwilowy wzrost nacisku S_n jest nawet kilkakrotnie większy od nacisku statycznego, lecz jest on punktowo zlokalizowany, tworząc ostry pik (rys. 22). W przypadku kąta $\theta_w = 30^\circ$ skok naprężenia $[S_r]$ jest mniejszy, jednak sumaryczne parcie ośrodka na ścianę zbiornika będzie stanowić znacznie większą wartość niż dla kąta $\theta_w = 10^\circ$.

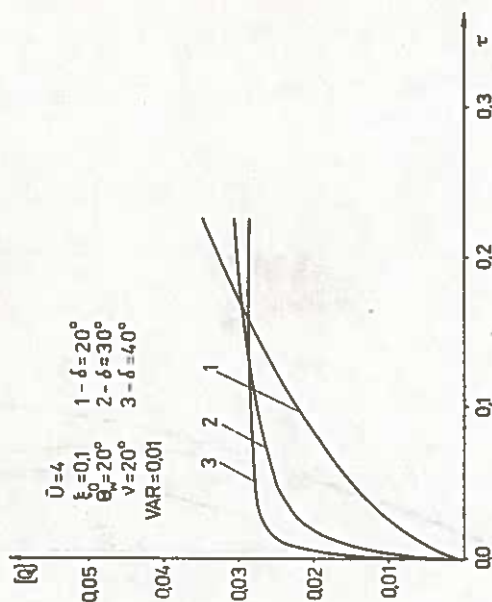
Kolejnym badaniem parametrem był kąt tarcia wewnętrznego ośrodka δ . Rysunek 25 ilustruje różnice w wartości skoku $[\epsilon_v]$ dla trzech wartości kąta δ , a rysunek 26 przedstawia dla porównania wydatek wypływu Q dla tych samych wartości parametru δ . Otrzymane rozwiązania wskazują jednoznacznie, że wzrost kąta prowadzi w efekcie do szybszego narastania wydatku wypływu Q w początkowej fazie procesu wypływu. Kąt tarcia wewnę-



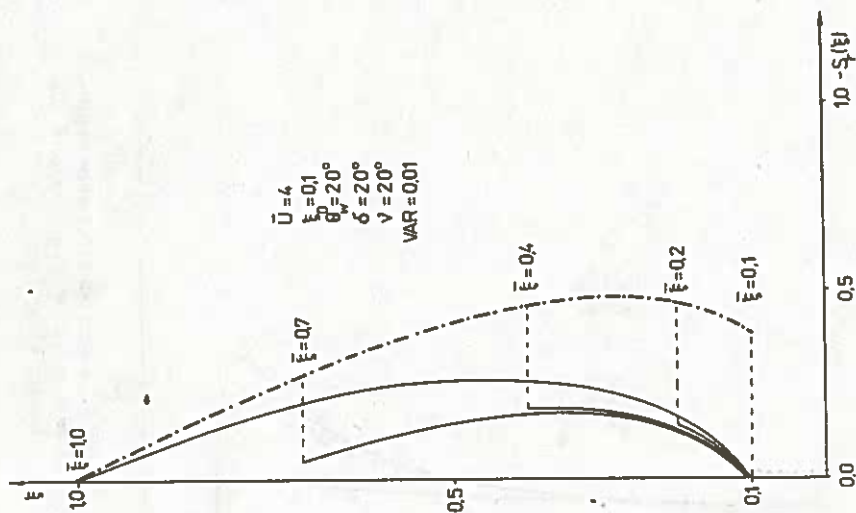




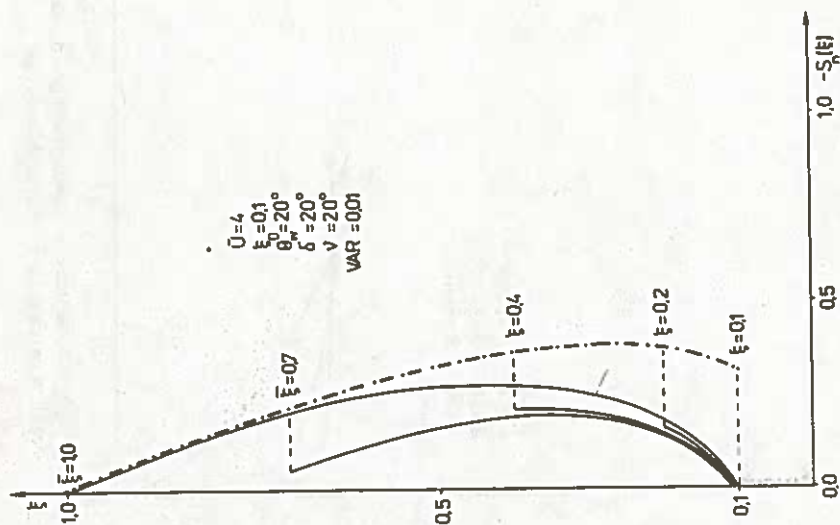
Rys. 25. Zależność skoku odkształcenia objętościowego $[\epsilon_v]$ od kąta tarcia wewnętrznego δ dla kanału klinowego



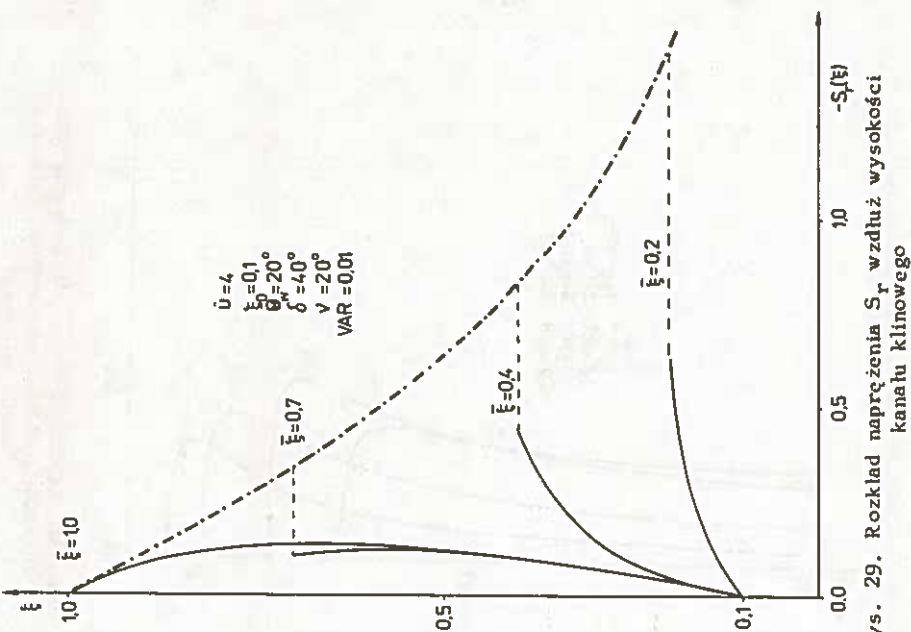
Rys. 26. Wpływ kąta tarcia wewnętrznego δ na wydajność przepływu Q z kanału klinowego



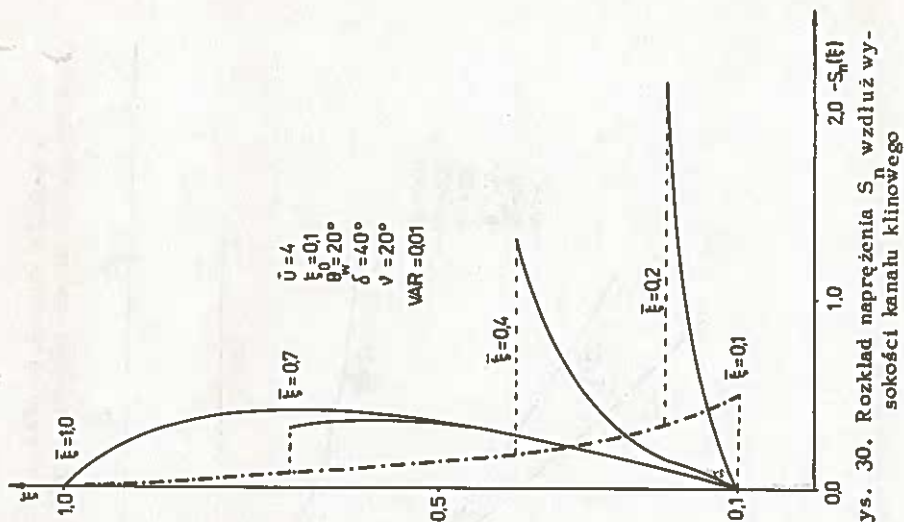
Rys. 27. Rozkład naprężenia S_r wzdłuż wysokości kanału klinowego



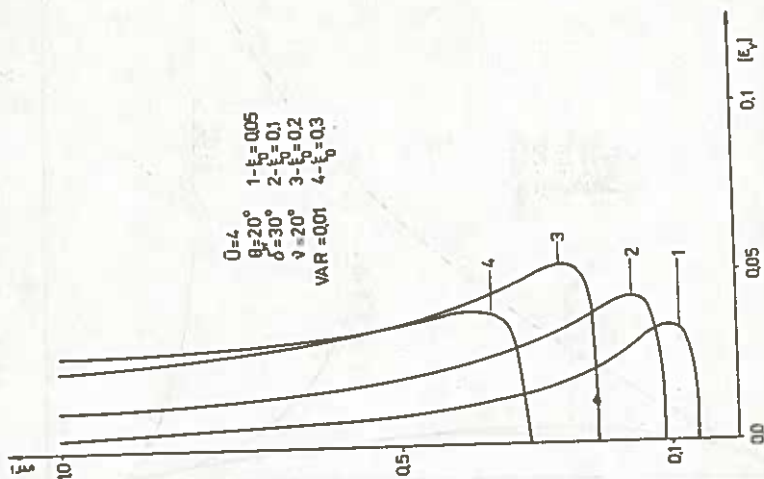
Rys. 28. Rozkład naprężenia S_n wzdłuż wysokości kanału klinowego



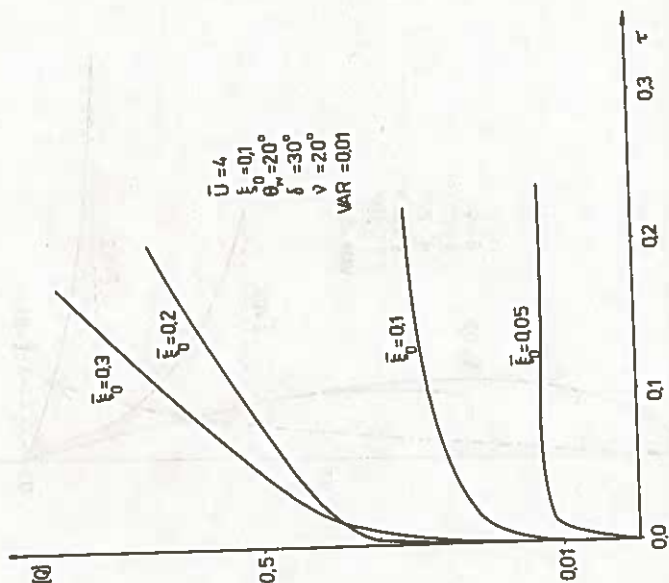
Rys. 29. Rozkład naprężenia S_r wzdłuż wysokości kanału klinowego



Rys. 30. Rozkład naprężenia S_n wzdłuż wysokości kanału klinowego



Rys. 31. Zależność skoku odkształcenia objętościowego $[\epsilon_v]$ od wielkości otworu wylotowego kanału klinowego



Rys. 32. Wpływ wielkości otworu wylotowego kanału klinowego na wydatek wypływu Q

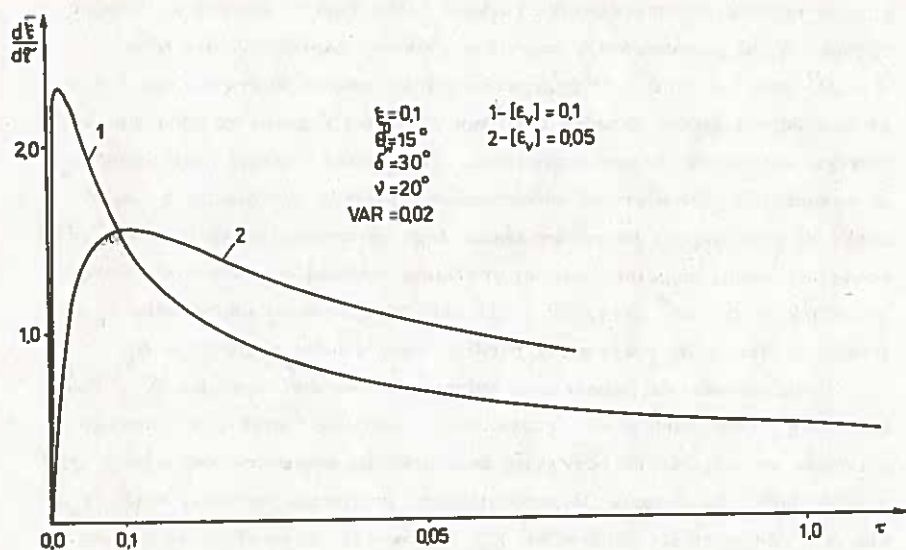
rnego istotnie zmienia również rozkład naprężenia w zbiorniku. Kolejne rysunki 27-30 przedstawiają omawiane rozkłady naprężenia dla kąta $\delta = 20^\circ$ oraz $\delta = 40^\circ$. W przypadku gdy kąt tarcia wewnętrznego δ równy jest kątowi tarcia ośrodka o ściany zbiornika ν znika różnica między biernym i czynnym stanem naprężenia. Dlatego też rozkład naprężenia S_n na rysunku 28 jest wiernym odtworzeniem rozkładu naprężenia S_r z rysunku 27 polegającym na przemnażaniu tego ostatniego rozkładu przez odpowiednią stałą. Zupełnie inaczej przebiega rozkład odpowiednich naprężeń dla kąta $\delta = 40^\circ$ (rys. 29 i 30). Każdemu skokowi naprężenia S_r na froncie rozluźnienia towarzyszy bardzo duży wzrost naprężenia S_n .

Ostatnim badanym parametrem był promień wylotu zbiornika ξ_0 . Parametr ξ_0 reprezentuje w rzeczywistości szerokość otworu wylotowego zbiornika ze względu na oczywistą zależność trygonometryczną między tymi wielkościami. Na rysunku 31 przedstawiono otrzymane wartości skoku $[E_v]$ dla czterech wartości parametru ξ_0 . Porównując zestawione krzywe widzimy, że największa chwilowa wartość skoku $[E_v]$ występuje dla parametru $\xi_0 = 0,2$, tworząc swego rodzaju "maksimum".

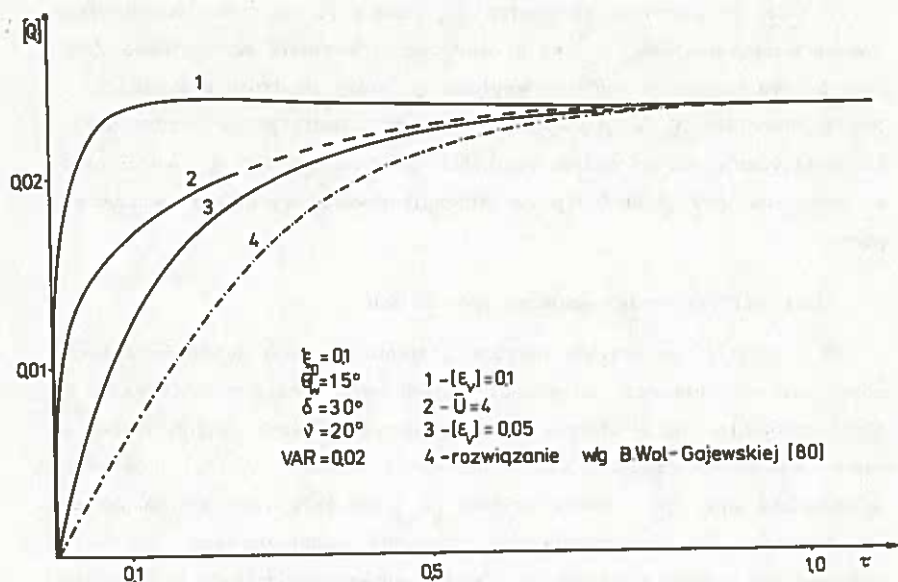
Z kolei ze wzrostem parametru ξ_0 obserwuje się coraz łagodniejszy spadek wartości skoku $[E_v]$ po przekroczeniu wartości maksymalnej. Znajduje to swe odbicie w wydatku wypływu Q , który ilustruje rysunek 32. Przykładowo dla $\xi_0 = 0,05$ wydatek wypływu stabilizuje się bardzo szybko (praktycznie już po czasie $\tau \approx 0,05$), podczas gdy dla $\xi_0 = 0,3$ całemu procesowi przejścia fali przez zbiornik towarzyszy ciągle wzrost wypływu.

Stała wartość rozluźnienia na froncie fali

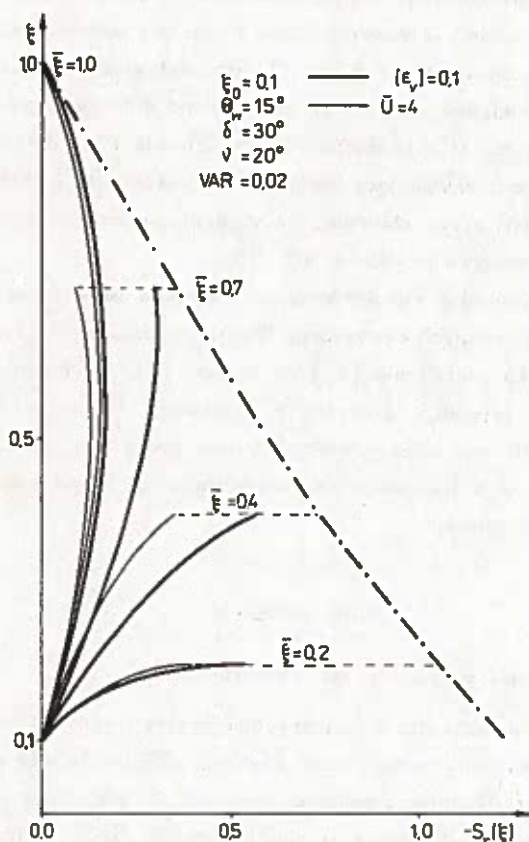
W rozdziale tym przeanalizowane zostanie drugie z zaproponowanych rozwiązań postawionego na wstępie zagadnienia. Przyjęta modyfikacja założeń sprowadza się w efekcie do następującej zamiany: dotychczasowy parametr wypływu - prędkość fali $\bar{U}$ jest teraz zmienną zależną i oznaczono ją aktualnie jako $\frac{d\xi}{d\tau}$, dawna zmienna $[E_v]$ zaś jest teraz stałym parametrem procesu. W celu rozwiązania równania różniczkowego (62) opisującego ten proces zastosowano również numeryczną metodę Runge-Kutta.



Rys. 33. Prędkość propagacji fali rozluźnienia $\frac{d\xi}{d\tau}$ w funkcji czasu τ w kanale klinowym



Rys. 34. Porównanie wydatku wypływu Q dla rozważanych modeli propagacji fali rozluźnienia w kanale klinowym



Rys. 35. Porównanie rozkładu naprężenia S_T wzdłuż wysokości kanału dla rozważanych modeli propagacji fali rozluźnienia w kanale klinowym

Rysunek 33 przedstawia otrzymane rozwiązanie numeryczne równania (62), czyli zależność prędkości fali $\frac{d\xi}{d\tau}$ od czasu τ dla dwóch wartości parametru $[\epsilon_v]$. Widać z tego, że po bardzo krótkotrwałym okresie nagłego wzrostu prędkości fali $\frac{d\xi}{d\tau}$ w dalszej fazie procesu prędkość ta monotonicznie maleje. Ponieważ charakter zmian prędkości $\frac{d\xi}{d\tau}$ jest bardzo podobny do zmian skoku odkształcenia objętościowego $[\epsilon_v]$ w poprzednim modelu, w dalszej dyskusji zatem pominięta zostanie analiza wpływu poszczególnych parametrów wpływu na otrzymane rozwiązania.

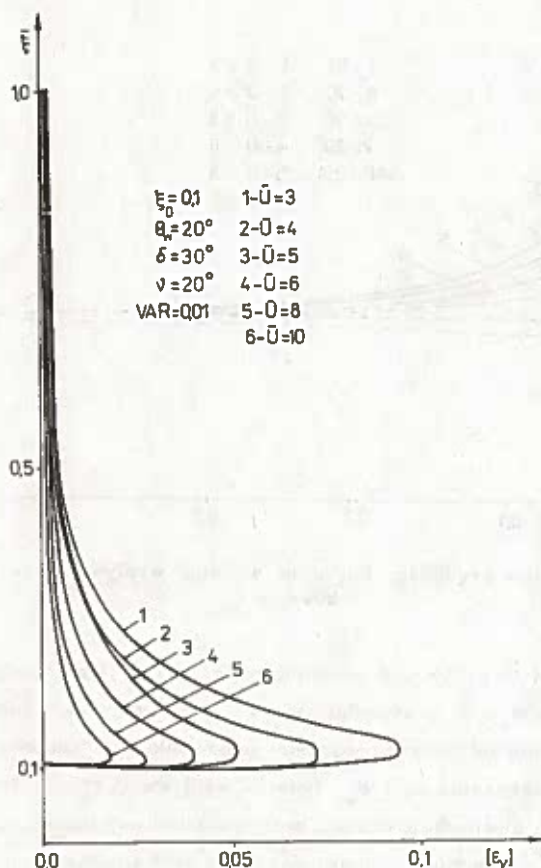
Rysunek 34 przedstawia porównanie wydatku wypływu otrzymanego z analizowanego modelu z rozwiązaniami wcześniej omawianymi. Z rysunku tego wynika, że wydatki wypływu obu przedstawionych modeli niewiele będą się różniły między sobą przy odpowiednio dobranych parametrach $[\epsilon_v]$ oraz $\bar{U}$, natomiast zasadnicza różnica istnieje w długości czasu trwania procesu. Model zakładający stałą wartość skoku $[\epsilon_v]$ daje dłuższy czas przejścia fali przez zbiornik, ze względu na zmniejszającą się w czasie trwania wypływu prędkość fali $\frac{d\epsilon}{d\tau}$.

Rysunek 35 przedstawia porównanie rozkładów naprężenia wynikających z obu analizowanych rozwiązań. Wyrażna różnica istnieje jedynie w wielkości skoku naprężenia $[S_r]$ na froncie fali. Skok ten jest znacznie mniejszy w przypadku założenia $[\epsilon_v] = \text{const}$. Pytanie, który z przedstawionych modeli jest bliższy rzeczywistemu procesowi - pozostawiono do rozstrzygnięcia w badaniach eksperymentalnych, które będą omówione w dalszej części pracy.

Kanał stożkowy

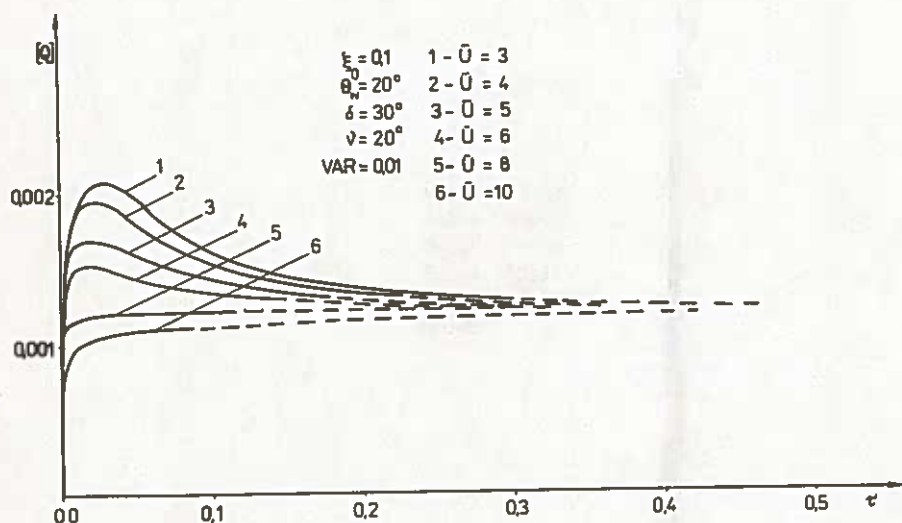
Stała prędkość propagacji fali rozluźnienia

W celu znalezienia przebiegu procesu wypływu ośrodka ze zbiornika stożkowego rozwiązano numerycznie równanie (85) w sposób analogiczny jak w przypadku zbiornika płaskiego. Rysunek 36 przedstawia porównanie otrzymanych skoków odkształcenia objętościowego $[\epsilon_v]$ na froncie fali dla kilku wartości prędkości fali $\bar{U}$, rysunek 37 zaś ilustruje wydatek wypływu Q obliczony zgodnie z równaniem (86). Z rysunku tego widać, że wydatek wypływu gwałtownie rośnie na początku procesu, przewyższając nawet znacznie, dla pewnych prędkości $\bar{U}$, wartość ustalonego wypływu, a następnie łagodnie maleje do wartości odpowiadającej stanowi ustalonemu. Efektu tego nie obserwowano w rozważanym uprzednio zbiorniku klinowym, dla którego jedynie w przypadku najmniejszej z rozpatrywanych prędkości fali $\bar{U} = 2$ chwilowy wydatek wypływu przewyższał nieznacznie wartości odpowiadające stanowi ustalonemu. Rysunek 38 ilustruje rozkład naprężenia S_r wzdłuż wysokości zbiornika stożkowego. W porównaniu z analogicznym rozkładem naprężenia odpowiadającym zbiornikowi klinowemu widocz-



Rys. 36. Wpływ prędkości fali $\bar{U}$ na wartość nieciągłości w zbiorniku stożkowym $[\epsilon_v]$

ne są jedynie niewielkie różnice ilościowe w przebiegu odpowiadających sobie krzywych. Zależność skoku odkształcenia objętościowego $[\epsilon_v]$ na froncie fali rozluźnienia od kąta θ_w nachylenia ściany stożka względem osi symetrii przedstawia rysunek 39. Ze wzrostem kąta θ_w obserwujemy wzrost skoku nieciągłości $[\epsilon_v]$. Ma to bezpośredni związek z wydatkiem wypływu Q , który został przedstawiony na rysunku 40. Dla tej samej

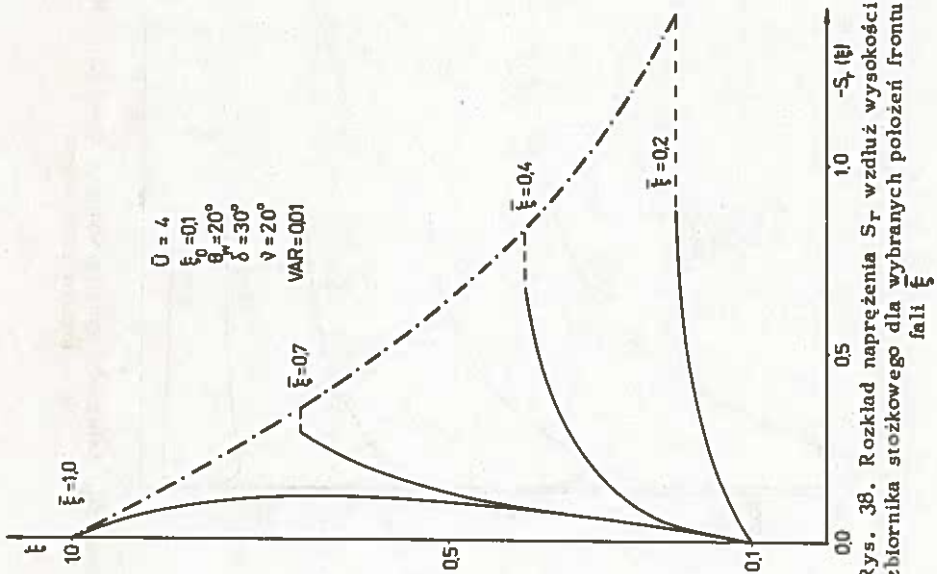


Rys. 37. Wpływ prędkości fali $\bar{U}$ na wydatek wypływu Q ze zbiornika stożkowego

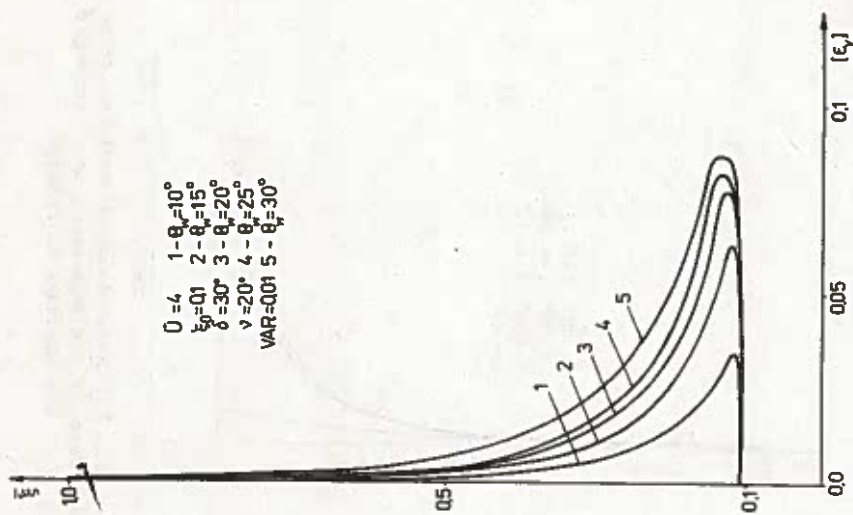
prędkości fali $\bar{U}$ różny jest przebieg początkowej fazy wypływu w zależności od kąta θ_w . W przypadku kąta $\theta_w = 10^\circ$ wydatek wypływu Q monotonicznie rośnie od zera do wartości odpowiadającej stanowi ustalonemu. W miarę powiększania kąta θ_w wydatek wypływu Q rośnie bardzo szybko w pierwszych chwilach procesu, tworząc ostre maksimum, a następnie maleje łagodnie do wartości odpowiadającej stanowi ustalonemu.

Kąt tarcia wewnętrznego ośrodka δ ma również bardzo wyraźny wpływ na przebieg początkowej fazy wypływu. Jak widać z rysunku 41, zwiększenie kąta δ z 20° do 40° powoduje kilkukrotny wzrost skoku $[E_v]$. Kąt δ zmienia ponadto w sposób ilościowy przebieg wydatku wypływu, do ilustracji rysunek 42. Dla kąta $\delta = 20^\circ$ wydatek wypływu Q rośnie monotonicznie od zera do wartości odpowiadającej ustalonemu wypływowi, dla większych zaś wartości kąta δ krzywa wypływu osiąga najpierw wyraźne maksimum, po czym łagodnie maleje.

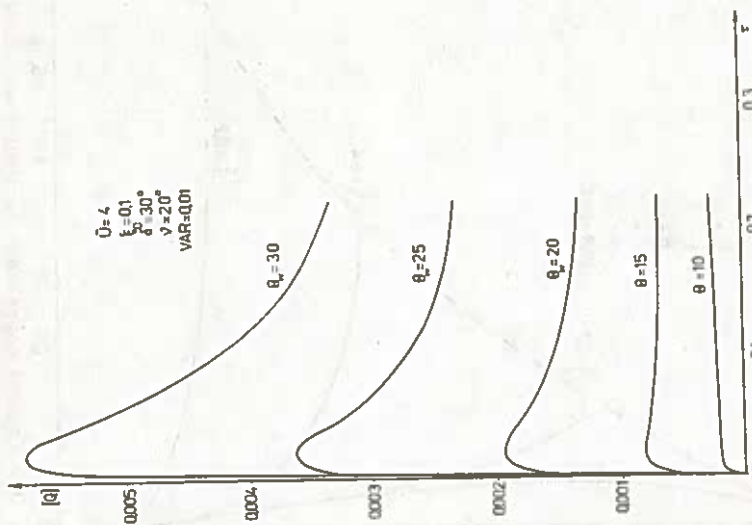
Kolejnym parametrem mającym wpływ na przebieg początkowej fazy opróżniania zbiornika jest wielkość otworu wylotowego. Z rysunku 43



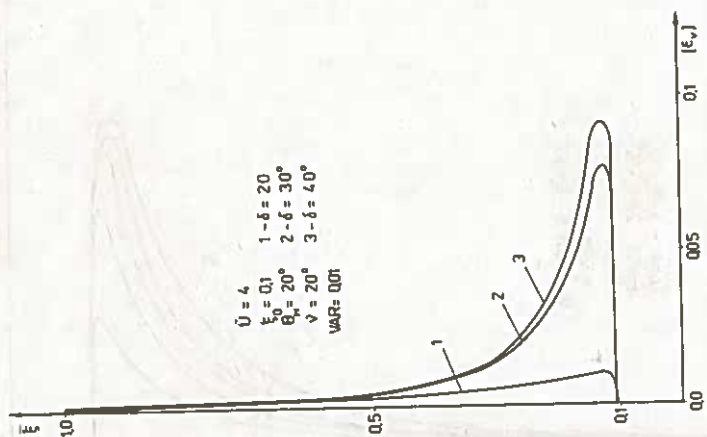
Rys. 38. Rozkład naprężenia S_r wzdłuż wysokości zbiornika stożkowego dla wybranych położen frontu fali ξ



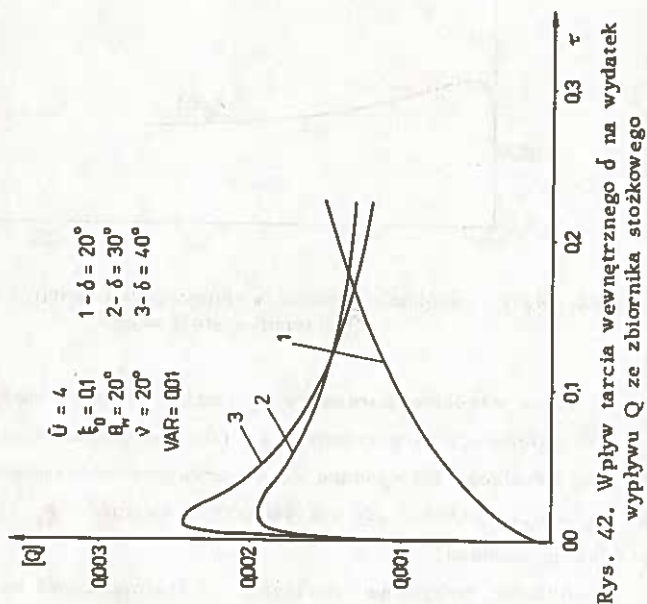
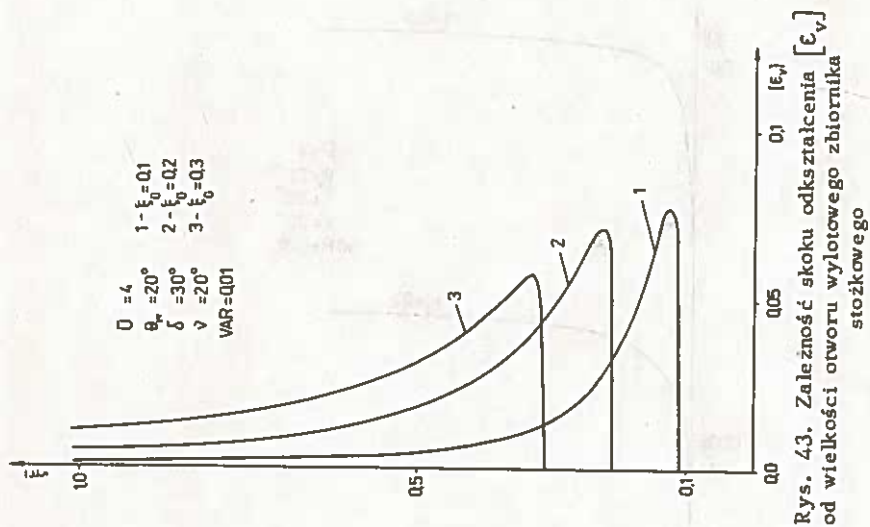
Rys. 39. Zależność nieciągłości odkształcenia objętościowego $[\xi_v]$ od kąta θ_w dla zbiornika stożkowego

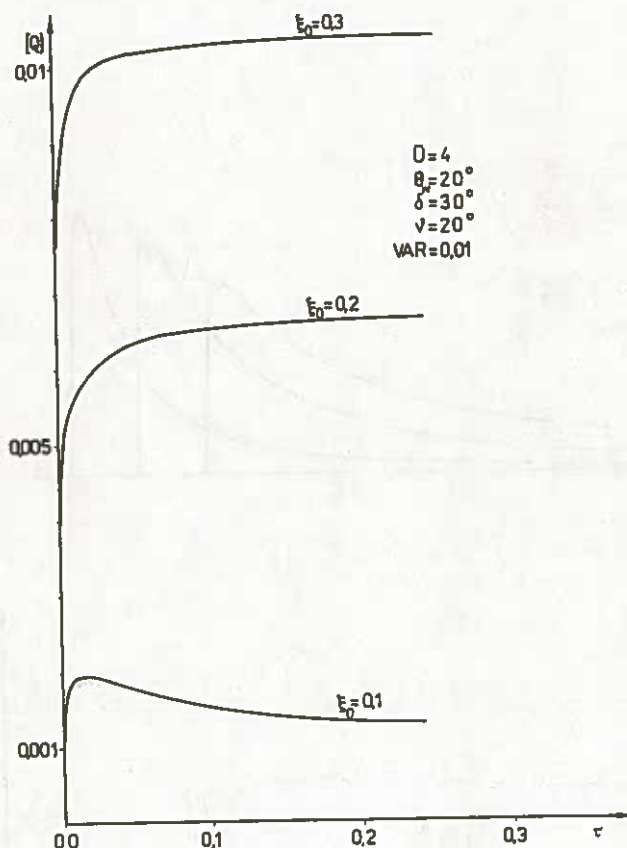


Rys. 40. Zależność wydatku wpływu Q od kąta θ_w dla zbiornika stożkowego



Rys. 41. Zależność skoku odkształcenia objętościowego $[E_w]$ od kąta wewnętrznego δ dla zbiornika stożkowego





Rys. 44. Wpływ wielkości otworu wylotowego na wydatek wypływu Q ze zbiornika stożkowego

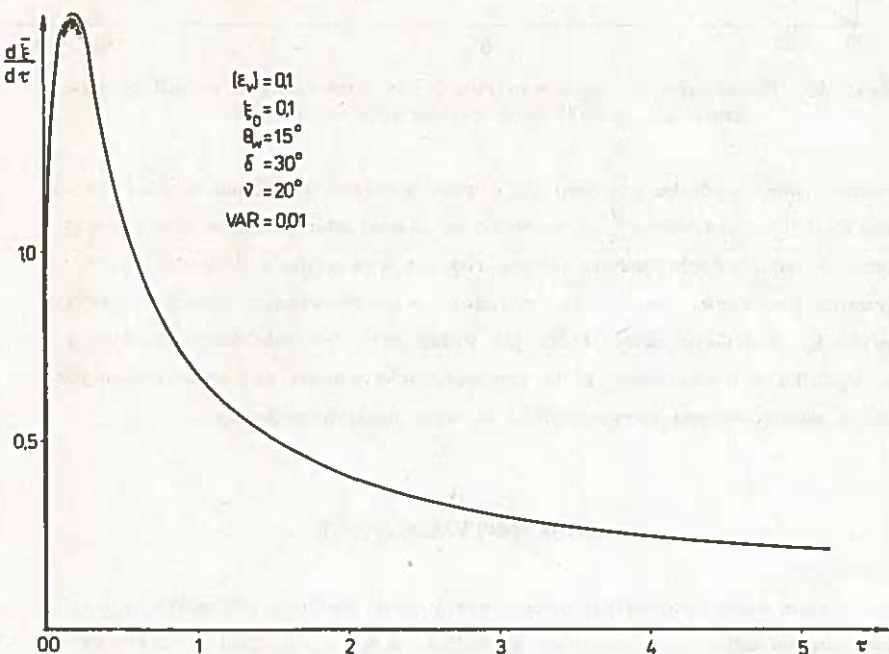
widać, że ze wzrostem parametru ξ_0 maleje wartość maksymalnego skoku $[\xi_v]$. W zależności od parametru ξ_0 również krzywa wydatku wypływu zmienia swój przebieg. Na rysunku 44 obserwujemy maksimum wydatku wypływu dla $\xi_0 = 0,1$, podczas gdy dla większych wartości ξ_0 krzywa Q jest monotonicznie rosnąca.

Porównując otrzymane rozwiązania z analogicznymi rozwiązaniami dotyczącymi kanału klinowego zauważa się znacznie silniejszy wpływ analizo-

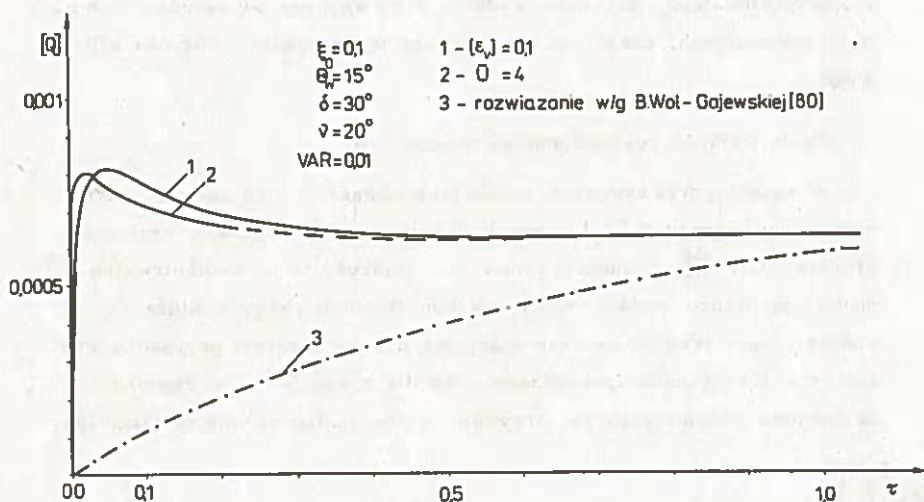
wanych parametrów na przebieg otrzymanych rozwiązań modelowych w przypadku zbiornika stożkowego. Szczególnie widoczne jest występowanie krótkotrwałego maksimum wydatku wypływu przy odpowiednio dobranych parametrach, czego nie obserwowano w przypadku zbiornika klinowego.

Stała wartość rozluźnienia na froncie fali

W celach porównawczych rozwiązano równanie (91) opisujące drugi rozważany przypadek $[\varepsilon_v] = \text{const}$. Rysunek 45 przedstawia otrzymaną prędkość fali $\frac{d\bar{\xi}}{d\tau}$ w funkcji czasu τ . Prędkość ta po krótkotrwałym maksimum bardzo szybko maleje, w konsekwencji czego wydłuża się znacznie czas trwania procesu osiągając w analizowanym przypadku wartość $\tau = 10$ (rysunek sporządzono tylko dla $\tau \in (0,5)$). Na rysunku 46 zestawiono wydatki wypływu otrzymane z obu analizowanych modeli. Cha-



Rys. 45. Prędkość propagacji fali $\frac{d\bar{\xi}}{d\tau}$ w funkcji czasu τ dla zbiornika stożkowego



Rys. 46. Porównanie wydatku wypływu Q dla rozważanych modeli propagacji fali rozluźnienia w zbiorniku stożkowym

akter zmian wydatku wypływu Q , a więc wyraźne maksimum w pierwszych chwilach procesu, oraz jego wartość są niemal identyczne w obu rozwiązaniach modelowych. Jedyną istotną różnicą występuje w długości czasu trwania procesów. Linia -.-.- zaznaczono na omawianym rysunku rozwiązanie B. Wol-Gajewskiej, które jak widać daje znacznie mniejsze wartości wydatku w początkowej fazie procesu, pokrywa się zaś niemal identycznie z analizowanymi rozwiązaniami w fazie ustalonego wypływu.

BADANIA DOŚWIADCZALNE

Celem eksperymentalnej części pracy było zbadanie początkowej fazy wypływu ośrodka ziarnistego ze zbiornika, a w szczególności rozstrzygnięcie, który z zaproponowanych modeli jest bardziej adekwatny do opisu przebiegu rzeczywistego procesu. Najprostsza weryfikacja przedstawionych rozważań teoretycznych powinna polegać na wyznaczeniu wartości prędkoś-

ci propagacji fali rozluźnienia na podstawie związku (18), po wcześniejszym eksperymentalnym znalezieniu zależności σ - ϵ w obszarze rozluźnienia, a następnie porównaniu uzyskanej wartości prędkości z prędkością zmierzoną w rzeczywistym zbiorniku. Takie podejście napotyka jednak znaczne trudności z powodu braku metod doświadczalnych pozwalających zrealizować w badanej próbce materiału stan naprężenia odpowiadający ściśle warunkom panującym w ośrodku w chwili przejścia fali rozluźnienia. Najwłaściwsze pod tym względem badania trójosiowego ściskania pozwalają uzyskać jedynie jakościowo zbliżony stan ośrodka.

Wobec trudności z realizacją takiego programu badań w przeprowadzonych eksperymentach główną uwagę zwrócono na pomiar prędkości propagacji fali rozluźnienia w modelowym zbiorniku oraz na ustalenie, w jakim stopniu parametry ośrodka i zbiornika wpływają na prędkość fali rozluźnienia.

Dodatkowo porównano również wielkość wyznaczonego eksperymentalnie wpływu ośrodka podczas nieustalonej fazy procesu z przewidywaniami modelowymi.

Pomiary parametrów mechanicznych ośrodków ziarnistych

Badania te polegały na wyznaczeniu następujących parametrów mechanicznych ośrodków ziarnistych użytych w przedstawionych rozważaniach modelowych: gęstości usypnej, kąta tarcia wewnętrznego, maksymalnego rozluźnienia ośrodka w trakcie próby trójosiowego ściskania oraz kąta tarcia ośrodka o materiały, z których wykonany był modelowy zbiornik. Do badań wybrano następujące roślinne materiały ziarniste: ziarno pszenicy odmiany Jana, ziarno jęczmienia odmiany Aramir, nasiona rzepaku, kłębki buraka cukrowego oraz porównawczo piasek, który był obiektem wielu badań modelowych. Gęstość usypną wyznaczono za pomocą gęstościomierza zbożowego o pojemności 250 cm³. Do wyznaczenia kąta tarcia wewnętrznego oraz rozluźnienia ośrodka wykorzystano aparat trójosiowego ściskania skonstruowany w Zakładzie Agrofizyki PAN w Lublinie. Średnica próbki wynosiła 150 mm, jej wysokość zaś 300 mm. Przyjęto trzy poziomy stałego ciśnienia bocznego: 0,02 MPa, 0,05 MPa oraz

0,1 MPa. Prędkość deformacji próbki w kierunku osi symetrii próbki wynosiła 10 mm/min. Kąt tarcia wewnętrznego poszczególnych ośrodków wyznaczono metodą obwiedni kół Mohra.

Tabela 1. Parametry mechaniczne badanych ośrodków sypkich

Materiał	Gęstość usypna $\rho \text{ [kgm}^{-3}\text{]}$	Kąt tarcia wewnętrznego $\delta \text{ [}^\circ\text{]}$	Kąt tarcia o szkło organiczne $\nu_1 \text{ [}^\circ\text{]}$	Kąt tarcia o drewno $\nu_2 \text{ [}^\circ\text{]}$
Pszenica	708	27	12	22
Jęczmień	660	30	13	24
Rzepak	640	29	12	21
Piasek	1580	32	12	22
Kłębki buraka cukrowego	208	51	13	26

Tabela 2. Parametry mechaniczne ziarna pszenicy dla różnych wilgotności

Wilgotność w [%]	Kąt tarcia wewnętrznego $\delta \text{ [}^\circ\text{]}$	Kąt tarcia o drewno $\nu \text{ [}^\circ\text{]}$
8,5	27	22
12,5	27	22
15	28	22
17	30	23
20	32	24
27	35	25

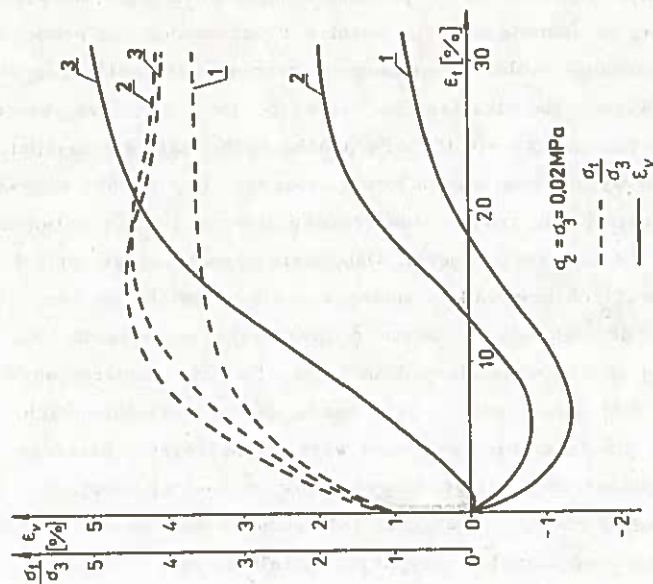
Kąt tarcia zewnętrznego między ośrodkiem a materiałem konstrukcyjnym określono za pomocą aparatu bezpośredniego ścinania, przesuwając płytkę badanego materiału względem cylindrycznego zbiornika o średnicy 21,5 cm wypełnionego ziarnem z prędkością 1,3 mm/s. Pomiary wykona-

no dla trzech wartości nacisku normalnego między płytką a badanym ośrodkiem: 0,02 MPa, 0,05 MPa oraz 0,1 MPa. Siłę tarcia mierzonego za pośrednictwem głowicy tensometrycznej. Każdy wariant eksperymentu powtarzano trzykrotnie. Otrzymane parametry mechaniczne dla poszczególnych ośrodków sypkich przedstawiono w tabeli 1. W przypadku ziarna pszenicy pomiary przeprowadzono dodatkowo dla sześciu poziomów wilgotności nasion. Uzyskane wartości kąta tarcia wewnętrznego oraz kąta tarcia ziarna pszenicy o drewno zamieszczono w tabeli 2.

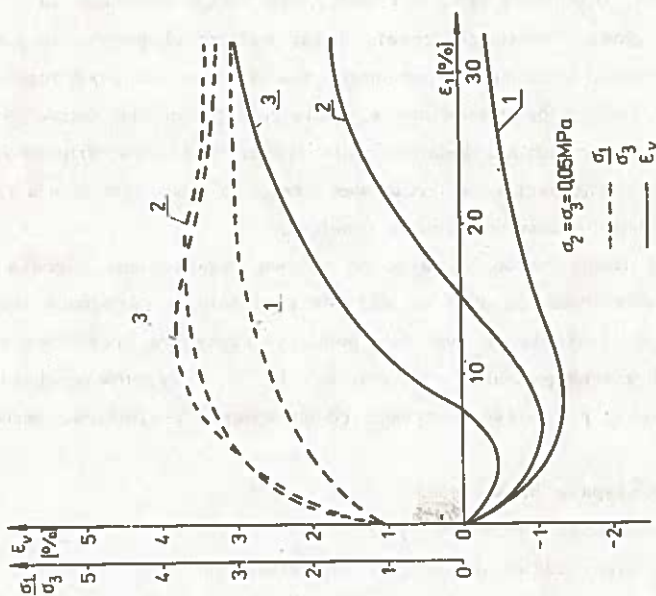
Szczególną uwagę zwrócono na ocenę wpływu zagęszczenia ośrodka na kąt tarcia wewnętrznego oraz na wartość rozluźnienia ośrodka w trakcie trójosiowego ściskania. W tym celu pomiary trójosiowe przeprowadzono na próbkach ziarna pszenicy o wilgotności 12,5%, przygotowanych na trzy różne sposoby pozwalające uzyskać różną wstępną porowatość ośrodka:

- 1 - ziarno usypane luźno,
- 2 - ziarno zagęszczone wibracyjnie,
- 3 - ziarno zagęszczone przez ugniatanie stemplem.

Otrzymane charakterystyki materiałowe dla kolejnych wartości naprężenia bocznego ilustrują rysunki 47-49. Z przedstawionych przebiegów doświadczalnych wynika, że istnieje wyraźna różnica w zachowaniu się próbek luźnych i zagęszczonych. próbka wstępnie zagęszczona powiększała swą objętość w miarę zwiększania odkształcenia osiowego. Przy najniższej wartości naprężenia bocznego $\sigma_3 = 0,02$ MPa próbka rozluźniała się najsilniej i natychmiast po wymuszeniu odkształcenia osiowego ϵ_1 . próbka zagęszczona również najszybciej traciła jednorodność deformacji oraz wytwarzała się wyraźna płaszczyzna ścięcia. Osłabienie ośrodka, czyli zmniejszenie się stosunku σ_1/σ_3 obserwowano w miarę wzrostu odkształcenia przy stosunkowo dużym odkształceniu osiowym ϵ_1 przekraczającym około 15%. Zupełnie inaczej zachowywała się próbka luźna. Podczas eksperymentów na ogół zagęszczała się, a jedynie przy bardzo dużych odkształceniach osiowych rzędu 20% oraz przy najniższej wartości naprężenia bocznego zaczynała powiększać swą objętość powyżej objętości początkowej. Ten rodzaj próbki wykazał również największą jednorodność deformacji. Na ogół próbka równomiernie pęczniała, przyjmując kształt beczki.



Rys. 47. Charakterystyki mechaniczne ziarna pszenicy otrzymane w teście trójosłowego ściskania:
1 - ziarno usypane luźno, 2 - ziarno zagęszczone wibracyjnie, 3 - ziarno zagęszczone stemplem



Rys. 48. Charakterystyki mechaniczne ziarna pszenicy otrzymane w teście trójosłowego ściskania:
1 - ziarno usypane luźno, 2 - ziarno zagęszczone wibracyjnie, 3 - ziarno zagęszczone stemplem

Tabela 3. Cechy mechaniczne ziarna pszenicy dla różnych stanów zagęszczenia ośrodka

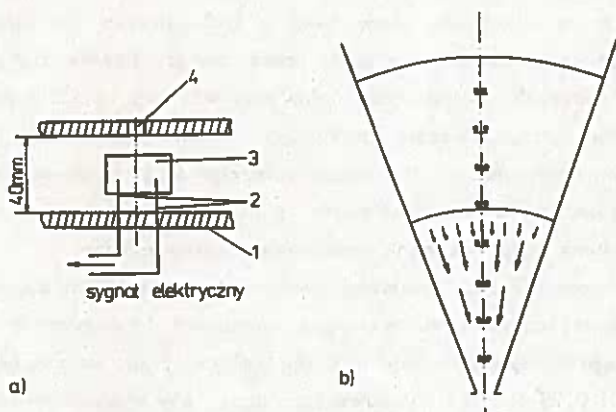
Zagęszczenie	Kąt tarcia we- wnętrznego [°]	Porowatość początkowa P [%]	Maksymalne rozluźnienie ϵ_v [%]
Ziarno usypane luźno	27	48,4	0,8
Ziarno zagęszczone wibracyjnie	28	43,5	2,0
Ziarno zagęszczone przez ugniatanie	29	42,8	5,0

zarejestrowanej średniej wartości. Uzasadnia to przyjętą w rozwiązaniach modelowych w poprzednim rozdziale maksymalną wartość rozluźnienia równą 0,1.

Stanowisko pomiarowe oraz metodyka pomiaru prędkości propagacji fali rozluźnienia w ośrodku ziarnistym

Omówione w przeglądzie literatury metody pomiarowe pozwalają w sposób pośredni mierzyć wielkości związane z przemieszczaniem się fali ruchu w ośrodku sypkim w zbiorniku. Z kolei metoda stereoskopowa wykorzystuje kamerę filmową, dając dobre rezultaty tylko przy niewielkich prędkościach propagacji fali. W związku z tym opracowano prostą metodę bezpośredniego pomiaru prędkości propagacji fali w ośrodku ziarnistym, w płaskim zbiorniku, polegającą na pomiarze odstępów czasu, jakie upłyną między otwarciem wylotu zbiornika, a chwilami rozpoczęcia ruchu przez kolejne warstwy ośrodka.

Układ pomiarowy (rys.50) składał się z modelowego zbiornika na ośrodek sypki w kształcie płaskiego klina o wysokości 80 cm, grubości 4 cm i szerokości otworu wylotowego 5 cm. Przednia i tylna pionowa ściana zbiornika wykonana została ze szkła organicznego, nachylone zaś pod kątem 15° ściany boczne wykonano z drewna w celu zwiększenia kąta



Rys. 50. Schemat układu do wyznaczania prędkości propagacji fali rozluźnienia ośrodka w kanale klinowym a) czujnik przemieszczenia: 1 - płyta czołowa, 2 - sztywne pręty, 3 - płytka, 4 - otwór w tylnej płycie
b) rozmieszczenie czujników wzdłuż wysokości zbiornika

tarcia materiału sypkiego o ściany boczne. W czołowej, pionowej płycie zbiornika (1) umieszczono poziomo, prostopadle do płyty, sztywne pozłacane pręty (2) długości 20 mm, grubości 0,3 mm i wysokości 2 mm. Pręty te umieszczone były parami w odległości 20 mm od siebie, symetrycznie względem osi zbiornika. Bezpośrednio poniżej każdej pary prętów umieszczono na warstwie nasypanego do zbiornika ośrodka metalową płytkę (3) o wymiarach 20 mm x 35 mm, która dotykając prętów zamykała obwód elektryczny. Minimalne przemieszczenie ośrodka, a wraz z nim metalowej płytki powodowało rozwarcie obwodu elektrycznego. Każda taka para prętów oraz zwierająca je płytka stanowiła rolę czujnika przemieszczenia dającego sygnał elektryczny, gdy przemieszczenie ziaren ośrodka wokół płytki przekroczyło określoną wartość. Wzdłuż osi symetrii zbiornika umieszczono 7 par styków w odległości 100 mm od siebie (rys. 50b). Maksymalna wysokość usypanego ośrodka wynosiła 80 cm. W tylnej pionowej ścianie zbiornika wykonano prostokątne otwory (4) długości 40 mm i szerokości 5 mm naprzeciw każdej pary prętów. Dzięki temu łatwe było umieszcze-

nie w zbiorniku metalowych płytek zwierających obwody elektryczne. Następnie po umieszczeniu płytki każdy z tych otworów był zamykany zaślepką wykonaną również ze szkła organicznego. Ponieważ w miarę dosypywania materiału do zbiornika dolne jego warstwy osiadały pod wpływem nacisku górnych warstw, powodując rozwarście zainstalowanych już styków, układ wyposażony był zatem w możliwość przemieszczania prętów w kierunku pionowym w zakresie około 2 mm. Wylot zbiornika zamykany był zworą podtrzymywaną przez dwa elektromagnesy.

Z przeprowadzonych pomiarów cechowania układu wynika, że maksymalne przemieszczenie metalowej płytki niezbędne do rozwarścia obwodu elektrycznego nie przekraczało 0,1 mm, całkowity zaś nacisk pary prętów wynosił 0,25 N i był wystarczająco duży, aby wyeliminować przypadkowe rozwarście styków na skutek drgań mechanicznych układu lub na skutek osiadania ośrodka pod wpływem własnego ciężaru. Sygnał elektryczny pochodzący z rozwarścia poszczególnych styków poddany był filtracji w celu usunięcia zakłóceń pochodzących od iskrzenia styków.

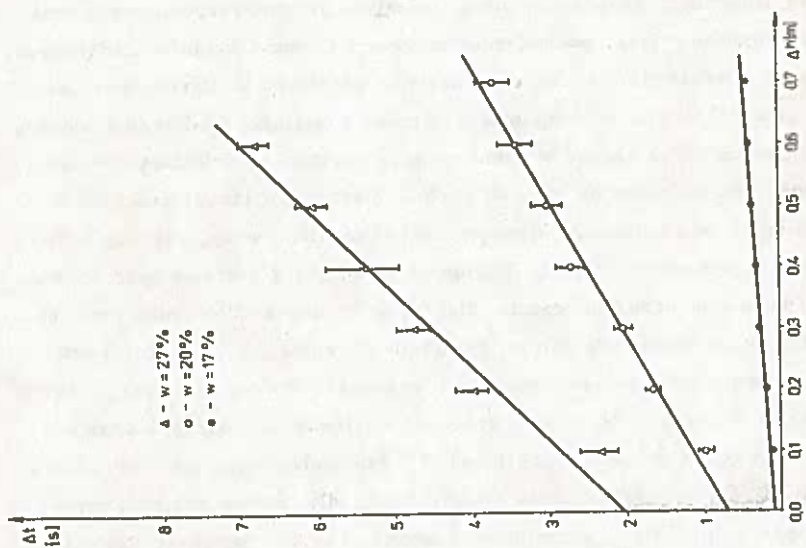
W momencie otwarcia wylotu zbiornika kolejne warstwy ośrodka rozpoczynały grawitacyjny wypływ. Wraz z ośrodkiem rozpoczynały ruch w dół umieszczone w ośrodku metalowe płytki rozwierające tym samym kolejne obwody elektryczne. Pomiar polegał na rejestracji odstępu czasu, jaki upłynął między rozwarciem kolejnych styków. Do pomiaru poszczególnych odstępu czasu wykorzystano czasomierze cyfrowe typu PFL-21 lub w przypadku dużych odstępu czasu oscylograf pętlicowy.

Zbiornik napełniano badanym ośrodkiem zawsze w jednakowy sposób. Na wysokości 50 cm powyżej górnej krawędzi zbiornika zainstalowany był dodatkowy pojemnik, w którego dnie znajdowała się szczelina o regulowanej długości i szerokości. Wypływający przez tę szczelinę z górnego pojemnika ośrodek napełniał badany klinowy zbiornik równomiernym strumieniem na całym przekroju.

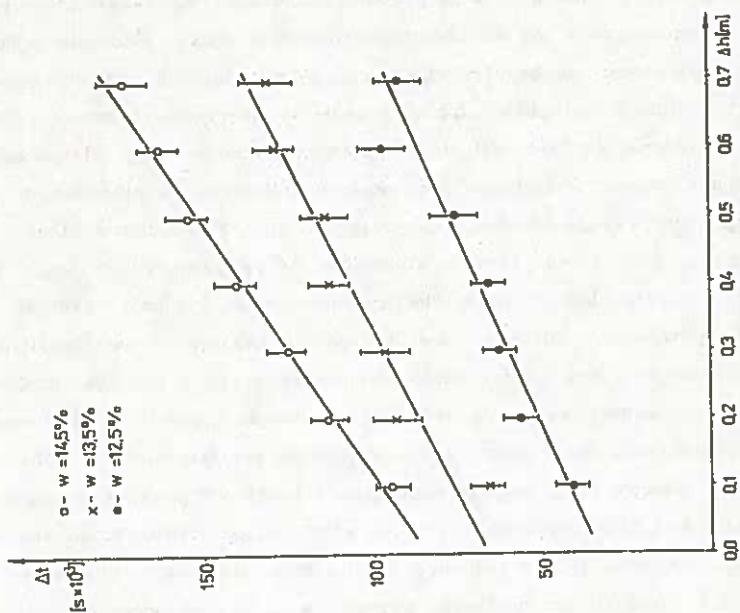
Program badań prędkości fali rozluźnienia oraz wyniki pomiarów

Celem eksperymentu było wyznaczenie prędkości przemieszczania się fali ruchu ośrodka w chwili otwarcia wylotu zbiornika oraz zbadanie, w

jaki sposób prędkość ta zależy od własności samego ośrodka oraz od geometrii zbiornika. Zasadniczą serię pomiarów przeprowadzono dla ziarna pszenicy odmiany Jana, pochodzącej ze Stacji Oceny Odmian w Zadąbrowiu. Ponieważ właściwości mechaniczne ośrodka złożonego z ziaren zbóż zależą w głównej mierze od wilgotności ośrodka i gęstości upakowania ziaren, zatem postanowiono zbadać w jakim stopniu czynniki te zmieniają również prędkość przemieszczania się fali ruchu. Ziarna nawilżano sztucznie w plastikowych pojemnikach, dolewając określoną ilość wody, tak aby uzyskać żądaną wilgotność ziarna. Następnie pojemniki z ziarnem były obracane na mieszkadle przez 48 godzin. Upatrując drugie źródło zmian prędkości rozprzestrzeniania się fali w geometrii zbiornika, do szczegółowych badań wybrano następujące parametry: szerokość otworu wylotowego, kąt pochylenia ścian bocznych, wysokość usypanej warstwy ośrodka oraz kąt tarcia ośrodka o pochyłone pod kątem θ_w ściany boczne. Porównano również prędkości przemieszczania się fali ruchu dla pięciu różnych ośrodków sypkich: pszenicy, jęczmienia, rzepaku, kłębków buraka cukrowego oraz piasku. Każdy wariant eksperymentu wykonano w dziesięciu powtórzeniach. Na rysunkach 51 i 52 przedstawiono zarejestrowane średnie wartości odstępów czasu Δt między chwilą otwarcia wylotu zbiornika a momentem pojawienia się impulsu elektrycznego w kolejnych punktach pomiarowych w funkcji odległości Δh tych punktów od wylotu zbiornika, dla kilku wybranych wartości wilgotności ziarna pszenicy. Duży odstęp czasu Δt między rozwarciem styków przy wylocie zbiornika, a pojawieniem się impulsu z pierwszego punktu pomiarowego wewnątrz ośrodka wynikał z opóźnionego charakteru pracy elektromagnesów zamykających wylot, na których napięcie elektryczne w chwili uruchamiania wypływu zanikało w sposób wykładniczy. Dlatego też w dalszych rozważaniach uwzględniano jedynie odstęp czasu między impulsami pochodzącymi z punktów pomiarowych umieszczonych wewnątrz ośrodka. Analizując uzyskane wyniki można zaobserwować, że w miarę przemieszczania się fali ruchu w górę zbiornika odstęp czasu między impulsami z kolejnych punktów pomiarowych są nieco krótsze, a zatem rośnie prędkość przemieszczania się fali ruchu. Ponieważ jednak tendencja ta nie była jednakowo wyraźna we wszystkich badanych przypadkach, przyjęto więc w pierwszym przybliż-

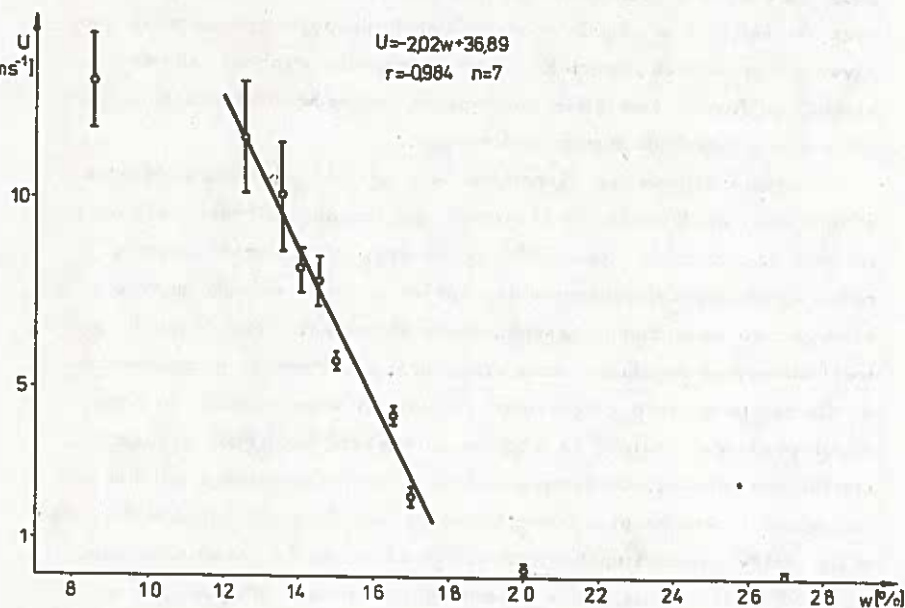


Rys. 52. Czas przejścia zaburzenia przez ośrodek w funkcji odległości od wylotu zbiornika dla trzech wilgotności ziarna pszenicy



Rys. 51. Czas przejścia zaburzenia przez ośrodek w funkcji odległości od wylotu zbiornika dla trzech wilgotności ziarna pszenicy

niu, że prędkość propagacji fali jest stała wzdłuż całej wysokości zbiornika. Punkty doświadczalne interpolowano zatem linią prostą zgodnie z metodą najmniejszych kwadratów. Odwrotność współczynnika nachylenia prostej regresji względem osi odległości Δh oznacza poszukiwaną prędkość propagacji fali. Rysunek 53 przedstawia wartości średnie prędkości przemieszczania się fali ruchu ośrodka dla różnych wilgotności ziarna pszenicy. Z rysunku tego widać, że największa zmiana prędkości fali zachodzi w zakresie wilgotności ziarna od około 12% do 20%. W przedziale wilgotności ziarna od 12,5% do 17% zależność prędkości fali od wilgotności aproksymowano linią prostą.



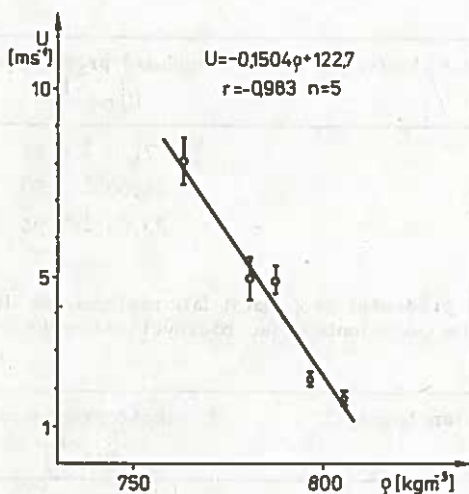
Rys. 53. Zależność prędkości propagacji fali rozluźnienia od wilgotności ziarna pszenicy

Natomiast dla ziarna pszenicy o wilgotności 20% oraz 27% obserwowano przemieszczającą się od dołu zbiornika ku górze strefę nieciągłości ośrodka. Powstająca przerwa w ciągłości ośrodka miała około 10 cm wysokości oraz przemieszczała się z bardzo małą prędkością - rzędu

$0,2 \text{ ms}^{-1}$. Warstwy materiału powyżej strefy nieciągłości odrywały się zbyt wolno od siebie w stosunku do prędkości wypływu, aby zapewnić ciągłość ośrodka w obszarze rozluźnienia. W związku z tym powstawała przemieszczająca się w górę zbiornika wolna przestrzeń między dolną powierzchnią nieruchomego jeszcze materiału, a górną swobodną powierzchnią ośrodka będącego już w fazie ruchu. Ten rodzaj przemieszczającego się zaburzenia polegał w istocie na załamywaniu się kolejnych chwilowych sklepień ośrodka. Sklepienia te były jeszcze zbyt słabe, aby utrzymać nacisk spoczywającego na nich materiału i w chwili, gdy brakowało im podparcia od dołu bardzo szybko ulegały zniszczeniu. Natomiast niewielkie zagęszczenie ośrodka zwiększało wytrzymałość tworzących się sklepień w stopniu wystarczającym do podtrzymania masy spoczywającego na nich materiału. W tym przypadku wpływ całkowicie ustawał po bardzo niewielkim opróżnieniu obszarów zbiornika bezpośrednio przylegających do otworu wylotowego.

Drugim analizowanym czynnikiem była gęstość upakowania ośrodka w zbiorniku. Zastosowano dwie metody zagęszczania ośrodka: wibracyjną oraz zagęszczanie tłokiem kolejno dosypywanych warstw ośrodka. W celu wyznaczenia uzyskanej w ten sposób gęstości ośrodka mierzono każdorazowo masę ziarna nasypanego do zbiornika. Różne wartości gęstości otrzymano regulując czas zagęszczania. Pomiarów przeprowadzono dla ziarna o nieco zwiększonej wilgotności w porównaniu do pozostałych pomiarów ($w=14\%$) ze względu na większą możliwość zagęszczania takiego ośrodka. Otrzymane wartości średnie prędkości fali dla pięciu gęstości ośrodka przedstawia rysunek 54. Z rysunku tego wynika wyraźny wpływ gęstości upakowania ziaren na prędkość przemieszczania się zaburzenia. Zmniejszenie porowatości o niecałe 3% powoduje ponad czterokrotne zmniejszenie prędkości fali. Zasadniczą trudnością było uzyskanie większej ilości różnych pośrednich powtarzalnych gęstości ośrodka. Zależność prędkości przemieszczania się fali rozluźnienia od gęstości upakowania ziaren aproksymowano linią prostą.

Badając wpływ parametrów zbiornika na prędkość przemieszczania się fali ruchu ośrodka zmieniano kolejno jeden z analizowanych czynników zachowując stałą wartość pozostałych. Wszystkie pomiary przepro-



Rys. 54. Zależność propagacji fali rozluźnienia od gęstości objętościowej ziarna pszenicy

wadzano dla powietrznie suchego ziarna pszenicy, tj. o wilgotności 12,5%. Układem odniesienia pozostał zbiornik o dotychczasowych parametrach, tzn. szerokość otworu wylotowego - 5 cm, wysokość warstwy ziarna - 80 cm, kąt pochylenia ścian bocznych - 15° oraz drewniana powierzchnia ścian bocznych.

Pierwszym badanych czynnikami była szerokość otworu wylotowego. Pomiary przeprowadzono dla trzech szerokości otworu: 3 cm, 5 cm i 7 cm. Otrzymane wartości prędkości zamieszczono w tabeli 4. Z uzyskanych danych widać wyraźny wpływ wielkości otworu na prędkość przemieszczania się zaburzenia. Kolejnym badanym czynnikiem był kąt pochylenia ścian bocznych θ_w . Zbadano trzy przypadki pochylenia ścian bocznych $\theta_w = 10^\circ$, 15° oraz 20° . Wyniki pomiarów przedstawione w kolejnej tabeli 5 wskazują, że ze wzrostem kąta θ_w maleje nieznacznie prędkość przemieszczania się zaburzenia. Rozważano również wpływ wysokości usypanego ziarna w zbiorniku na prędkość przemieszczania się fali ruchu ośrodka. Na-

Tabela 4. Średnie prędkości propagacji fali dla różnych szerokości otworu wylotowego

Szerokość otworu wylotowego $d [m]$	Prędkość propagacji fali $U [ms^{-1}]$
0,03	$7,10 \pm 0,61$
0,05	$11,60 \pm 1,50$
0,07	$23,95 \pm 1,94$

Tabela 5. Średnie prędkości propagacji fali rozluźnienia dla różnych kątów pochylenia ścian bocznych zbiornika

Kąt pochylenia ścian bocznych $\theta_w [^\circ]$	Prędkość propagacji fali $U [ms^{-1}]$
10	$12,85 \pm 1,84$
15	$11,60 \pm 1,50$
20	$9,10 \pm 1,20$

Tabela 6. Średnie prędkości propagacji fali rozluźnienia dla różnych materiałów ścian bocznych zbiornika

Materiał ścian bocznych	Kąt tarcia ziarna o ściany boczne $\nu [^\circ]$	Prędkość propagacji fali $U [ms^{-1}]$
Drewno	22	$11,60 \pm 1,50$
Papier ścierny	26	$7,20 \pm 0,78$
Naklejone ziarna pszenicy	27	$4,86 \pm 0,43$

sypywano ziarno do wysokości 40 cm oraz 80 cm. Opierając się na przeprowadzonych pomiarach nie stwierdzono istotnych różnic w prędkości fali. Należy przypuszczać, że wysokość usypanego ziarna będzie miała pośredni wpływ na prędkość fali poprzez zwiększony nacisk w

dolnych warstwach, a stąd przez zwiększone zagęszczenie ośrodka. Rozważane w doświadczeniu wysokości nie powodowały istotnego zróżnicowania gęstości ośrodka, stąd też brak różnic w prędkości fali.

Następnym analizowanym czynnikiem był kąt tarcia ziarna o pochyłone pod kątem $\theta_w = 15^\circ$ ściany boczne zbiornika. Oprócz stosowanej we wszystkich eksperymentach powierzchni drewnianej uwzględniono dodatkowo dwa inne materiały pokrywające ściany boczne: papier ścierny oraz naklejoną warstwę ziarna. Otrzymane wyniki przedstawia tabela 6, w której podano dodatkowo kąty tarcia ziarna pszenicy o badane materiały wyznaczone omawianą wcześniej metodą. Z porównania zestawionych wartości liczbowych widać wyraźny wpływ kąta tarcia ośrodka o ściany boczne na prędkość przemieszczania się zaburzenia. Skrajny przypadek ścian bocznych pokrytych ziarnem można interpretować jako tzw. przepływ kominowy, podczas którego wypływ ośrodka odbywa się tylko w części centralnej zbiornika, boczne obszary zaś pozostają nieruchome.

Tabela 7. Średnie prędkości propagacji fali rozluźnienia dla różnych materiałów sypkich

Materiał	Prędkość propagacji fali $U \text{ [ms}^{-1}\text{]}$
Pszenica	$11,60 \pm 1,43$
Jęczmień	$11,80 \pm 1,98$
Rzepak	$6,02 \pm 0,82$
Piasek	$5,10 \pm 0,48$
Kłębki buraka cukrowego	$0,81 \pm 0,10$

Kolejna tabela 7 przedstawia porównanie prędkości przemieszczania się fali rozluźnienia dla pięciu różnych materiałów sypkich. Z uzyskanych wyników widać, że prędkość fali nie różni się istotnie dla pszenicy i jęczmienia, natomiast wyraźnie maleje dla piasku oraz nasion rzepaku. W przypadku kłębów buraka cukrowego obserwowano przemieszczającą się bardzo powoli nieciągłość ośrodka, podobną do tej,

jaka pojawiała się przy przepływie pszenicy o bardzo dużej wilgotności.

Podsumowując niniejszy rozdział należy stwierdzić, że prędkość przemieszczania się fali rozluźnienia ośrodka w chwili rozpoczynania wypływu ze zbiornika zależy w istotny sposób od właściwości samego ośrodka: a więc jego wilgotności, stopnia zagęszczenia oraz rodzaju badanego ośrodka, a także od parametrów zbiornika, czyli: wielkości otworu wylotowego, współczynnika tarcia ośrodka o ściany zbiornika oraz w niewielkim stopniu od kąta pochylenia ścian bocznych. Nie zaobserwowano natomiast istotnych zmian prędkości przemieszczania się zaburzenia wzdłuż wysokości zbiornika, co pozwala w sposób jednoznaczny wybrać pierwszy z przedstawionych w poprzednim rozdziale modeli propagacji fali jako bardziej zbliżony do rzeczywistego procesu.

Porównanie doświadczalnej i teoretycznej wartości wypływu ośrodka

Z przedstawionych w części teoretycznej rozwiązań numerycznych wynika, że poszczególnym prędkościom propagacji fali odpowiadają ściśle określone wartości nieustalonego wydatku wypływu. Mierząc zatem równocześnie prędkość propagacji fali oraz ilość ośrodka, który wypłynął ze zbiornika w czasie przejścia fali rozluźnienia, a następnie porównując uzyskane wartości wypływu z przewidywaniami rozwiązań modelowych można ocenić poprawność przyjętego modelu. Ponieważ jednak proces przejścia fali rozluźnienia przez zbiornik trwa bardzo krótko (w przypadku rozważanego zbiornika poniżej 0,2 s), trudno byłoby zatem bezpośrednio zmierzyć masę ośrodka wypływającego w tym czasie ze zbiornika. Posłużono się zatem procedurą pośrednią polegającą na fotografowaniu słupa ośrodka wypływającego z otworu wylotowego w chwili, gdy fala rozluźnienia przeszła przez cały ośrodek w zbiorniku. Z otrzymanych fotografii odczytywano wysokość słupa ośrodka poniżej poziomu otworu wylotowego i na tej podstawie obliczano objętość wypływającego ośrodka. Ponieważ jednak należy spodziewać się, że wypływający ze zbiornika słup ośrodka ulega rozluźnieniu po opuszczeniu otworu wylotowego, na podstawie zatem objętości wypły-

wającego ośrodka nie można dokładnie wyznaczyć jego masy. Z tego względu eksperyment ten potraktowano jako jakościową ocenę otrzymanego rozwiązania modelowego.

Do przeprowadzenia badań wykorzystano opisane wcześniej stanowisko pomiarowe służące do pomiaru prędkości propagacji fali w klinowym zbiorniku. Tym razem jednak parę styków służącą jako czujnik przemieszczenia (położoną najwyżej w zbiorniku) połączono z lampą błyskową. Cały proces odbywał się w zaciemnionym pomieszczeniu przy otwartej migawce aparatu fotograficznego. Sygnał elektryczny pochodzący z najwyżej położonej w zbiorniku pary styków uruchamiał lampę błyskową, powodując jednocześnie naświetlenie kliszy fotograficznej. Z otrzymanych w ten sposób fotografii zbiornika określono objętość wypływającego ośrodka.

Jak wynika z pomiarów omówionych w rozdziale pt. Program badań... różne prędkości fali rozluźnienia można uzyskać poprzez zmianę wilgotności ziarna oraz gęstości ośrodka w zbiorniku. Zgodnie z tym w przeprowadzonych badaniach wilgotność ziarna pszenicy zmieniano w zakresie od 8,5% do 15% oraz gęstość od 763 kgm^{-3} do 788 kgm^{-3} , uzyskując w ten sposób 8 różnych wartości prędkości przejścia zaburzenia przez zbiornik. Równocześnie z pomiarów omówionych w rozdziale pt. Pomiarów parametrów... widać, że w tym zakresie zmian wilgotności i gęstości parametry mechaniczne ośrodka zmieniały się niewiele (tab. 2 i 3). Przyjęto zatem średnie wartości parametrów δ i ν w rozważanym zakresie zmian wilgotności i gęstości równe odpowiednio $27,5^\circ$ oraz 22° . Następnie obliczono teoretyczny wydatek wypływu Q dla poszczególnych eksperymentalnych prędkości oraz całkowity wypływ ośrodka podczas przejścia fali przez zbiornik.

Doświadczalne oraz teoretyczne wartości wypływu odpowiadające kolejnym prędkościom fali rozluźnienia wyrażone w jednostkach objętości zestawiono w tabeli 8. Przedstawione w tej tabeli wartości doświadczalne stanowiły uśrednienie 15 powtórzeń każdego eksperymentu. Dodatkowe porównanie uzyskanych wartości eksperymentalnych z rozwiązaniami modelowymi przedstawia rysunek 55, z którego wynika jakościowa zgodność danych eksperymentalnych z przewidywaniami zaproponowanego modelu teoretycznego. Na rysunku tym zaznaczono również wartoś-

ci wypływu, jakie otrzymalibyśmy, gdyby poszczególne ziarna ośrodka po opuszczeniu otworu wylotowego zbiornika opadały swobodnie w polu grawitacyjnym. Ponieważ wyliczone w ten sposób wartości wypływu leżą poniżej wartości zmierzonych doświadczalnie, należy więc przypuszczać, że wypływający ze zbiornika szup ziarna poruszać się będzie z przyspieszeniem większym niż grawitacyjne, a więc będzie dodatkowo wypychany przez ośrodek zgromadzony w zbiorniku.

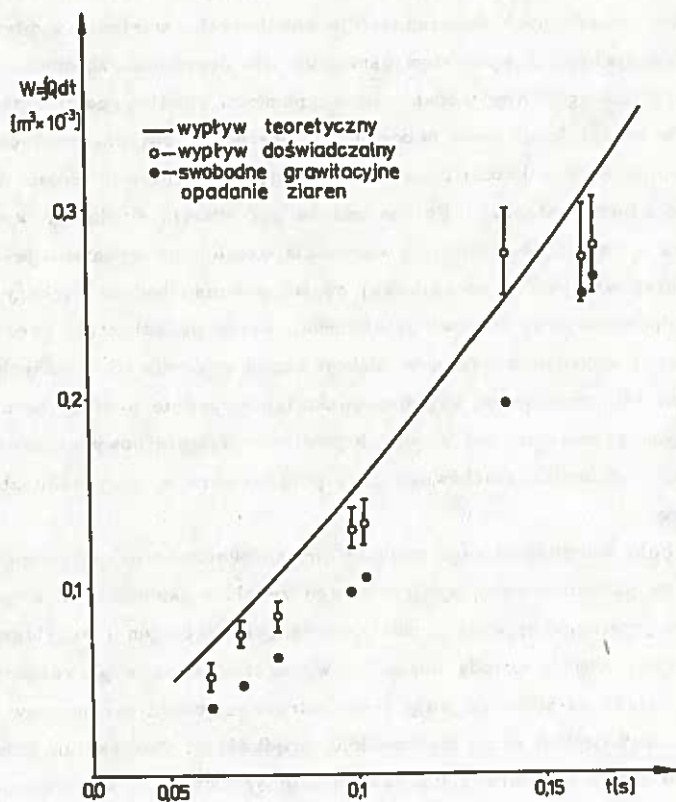
Tabela 8. Teoretyczna i doświadczalna wartość wypływu ziarna pszenicy dla różnych prędkości propagacji fali rozluźnienia

Prędkość propagacji fali	Czas przejścia fali przez zbiornik	Wypływ doświadczalny	Wypływ teoretyczny
$U \text{ [ms}^{-1}\text{]}$	$t \text{ [s]}$	$W \text{ [m}^3 \times 10^{-6}\text{]}$	$W \text{ [m}^3 \times 10^{-6}\text{]}$
13,10	0,061	$52,1 \pm 6,2$	68,4
11,60	0,069	$73,9 \pm 5,4$	84,8
10,07	0,079	$84,0 \pm 7,8$	108,1
8,10	0,099	$130,6 \pm 10,9$	155,5
7,83	0,102	$133,8 \pm 13,2$	166,4
5,72	0,140	$277,6 \pm 24,9$	252,5
4,96	0,161	$273,7 \pm 26,4$	306,5
4,88	0,164	$280,0 \pm 24,9$	314,2

Z omówionych w części teoretycznej rozwiązań modelowych można wyciągnąć jeszcze jeden praktyczny wniosek, który stosunkowo łatwo daje się zweryfikować eksperymentalnie. Jeśli porównamy teoretyczny wydatek wypływu Q ze zbiornika klinowego oraz stożkowego dla tych samych wartości parametrów obu zbiorników oraz dla tych samych prędkości fali $\bar{U}$, zauważymy odmienny przebieg nieustalonego wypływu dla obu typów zbiornika. W przypadku zbiornika stożkowego wydatek wypływu w początkowej fazie przekraczał znacznie wartości odpowiadające ustalonemu wypływowi, w przypadku zaś zbiornika klinowego wydatek ten monotonicznie narastał od zera do wartości ustalonej.

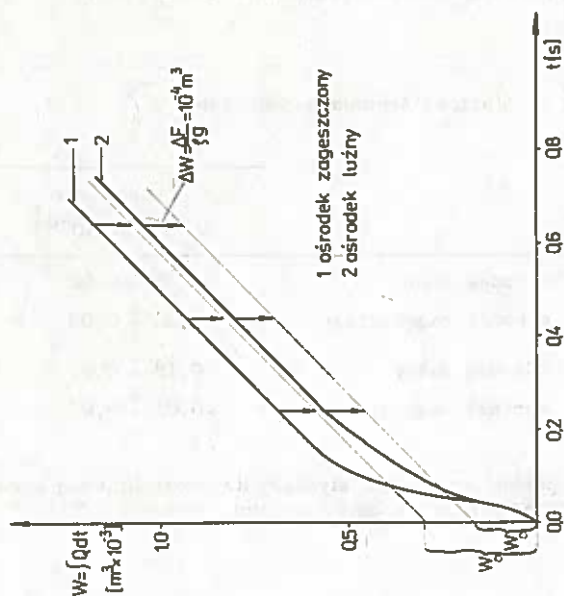
Eksperymentalna weryfikacja tego faktu powinna zatem polegać na porównaniu zmierzonych doświadczalnie chwilowych wartości wypływu w fazie nieustalonej z wydatkiem ustalonym dla przypadku zbiornika stożkowego i klinowego. Aby jednak uniknąć pomiaru chwilowego wydatku wypływu w nieustalonej fazie procesu (co nastręcza znaczne trudności ze względu na bardzo krótki czas trwania tej fazy wypływu) można posłużyć się procedurą zastępczą. Polega ona na porównaniu średniego wydatku wypływu w fazie nieustalonej z wartością ustalonego wydatku. Jeśli średni wydatek wypływu w początkowej części procesu będzie większy od wartości odpowiadającej stanowi ustalonemu, wtedy przedłużenie prostoliniowej części wykresu wypływu w funkcji czasu przetnie oś rzędnych powyżej zera. W przeciwnym wypadku punkt ten wypadnie poniżej zera. Zgodnie z tym przecięcie osi rzędnych powinno nastąpić powyżej zera w przypadku zbiornika stożkowego oraz poniżej zera w przypadku zbiornika klinowego.

W celu weryfikacji tego wniosku przeprowadzono eksperyment polegający na pomiarze masy wypływającego ze zbiornika ośrodka za pomocą wagi tensometrycznej wraz z mostkiem tensometrycznym i oscylografem pętlicowym. Aby tą metodą dokładnie wyznaczyć masę wypływającego ośrodka, należy od wskazań wagi tensometrycznej odjąć dynamiczny nacisk ziaren uderzających o nią z określoną prędkością. Nacisk ten stosunkowo łatwo można wyznaczyć dla fazy ustalonego wypływu według następującego związku: $\Delta F = Q [v] \rho$, gdzie $[v]$ oznacza skok prędkości cząstek podczas zderzenia z wagą. Występujący w tym związku ustalony wydatek wypływu wyznaczono z nachylenia prostoliniowej części krzywej eksperymentalnej. Dzieląc otrzymany wydatek przez przekrój otworu wylotowego zbiornika znajdujemy prędkość cząstek opuszczających zbiornik. Jeśli uwzględnimy dodatkowo przyspieszony ruch cząstek ośrodka w polu grawitacyjnym na odcinku o długości 0,1 m (między wylotem zbiornika i szalką wagi), to znajdziemy prędkość, z jaką cząstki uderzają o szalkę. Przyjmując dalej, że cząstki oddają całą swą energię kinetyczną podczas niesprężystego zderzenia z wagą znajdujemy zgodnie z przedstawionym związkiem wartość dynamicznego nacisku na wagę. Po odjęciu oszacowanego w ten sposób dynamicznego nacisku od wskazań wagi tensometrycznej otrzymujemy wartość wypływu w funkcji czasu.

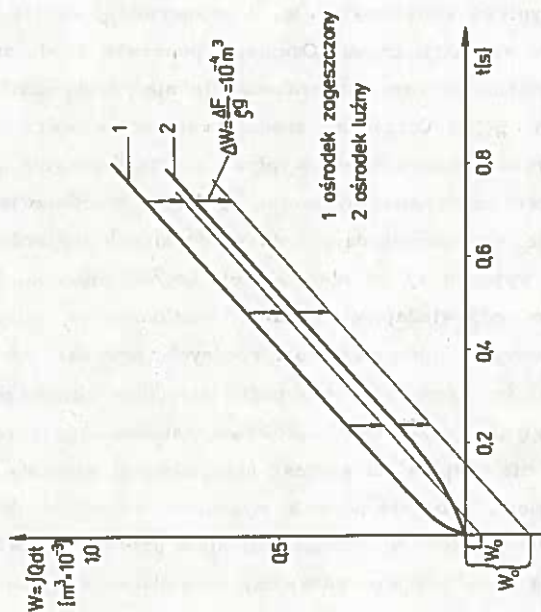


Rys. 55. Porównanie teoretycznego i doświadczalnego wypływu ziarna pszenicy ze zbiornika klinowego dla różnych czasów przejścia fali rozluźnienia przez zbiornik

Pomiary przeprowadzono dla zbiornika klinowego oraz dla zbiornika stożkowego o analogicznych parametrach jak zbiornik klinowy. Rejestrowano wypływ ziarna pszenicy o wilgotności 14% nasypanego do zbiornika luźno bądź też zagęszczonego tłokiem. Zwiększona wilgotność ziarna gwarantowała, że prędkość fali będzie odpowiednio mała co wzmocni oczekiwany efekt (rys. 53). Pomiary przeprowadzono w 10 powtórzeniach. Otrzymane krzywe doświadczalne przedstawiają rysunki



Rys. 56. Krzywe wpływu ośrodka ze zbiornika stożkowego (ziarno pszenicy o wilgotności 14%)



Rys. 57. Krzywe wpływu ośrodka ze zbiornika klinowego (ziarno pszenicy o wilgotności 14%)

56 i 57. Z krzywych tych wynika, że po stosunkowo krótkim czasie rzędu 0,2 s wydatek wypływu stabilizował się, a rejestrowany nacisk ziarna na wagę rósł liniowo w funkcji czasu. Oceniając poprawkę na dodatkowy dynamiczny nacisk ziarna na wagę stwierdzono, że nie przekraczał on wartości $F = 10^{-4} \rho \cdot g(N)$. Otrzymane średnie wartości współrzędnej punktu przecięcia przedłużenia wykresu wypływu z osią rzędnych (po uwzględnieniu poprawki na dynamiczny nacisk na wagę) przedstawia tabela 9. Na podstawie otrzymanych danych doświadczalnych stwierdzamy, że średni wydatek wypływu Q w nieustalonej części procesu był większy od wartości odpowiadającej stanowi ustalonemu w przypadku zbiornika stożkowego (przecięcie osi rzędnych powyżej zera), mniejszy zaś od wartości ustalonej w przypadku zbiornika klinowego (przecięcie osi rzędnych poniżej zera). Również wstępne zagęszczenie ośrodka w zbiorniku miało wpływ na wartość nieustalonego wypływu. Przeprowadzony eksperyment, choć nie pozwala wyznaczyć dokładnie chwilowych wartości wydatku wypływu w nieustalonej fazie procesu, potwierdza jednak przewidywania modelowe stwierdzające, że wydatek wypływu w początkowej fazie procesu może przyjmować różne wartości, większe i mniejsze od ustalonego wypływu zależnie od własności ośrodka oraz od geometrii zbiornika.

Tabela 9. Wartość średnia współrzędnej W_o^x

		Współrzędna $W_o \left[m^3 \times 10^{-3} \right]$
Zbiornik stożkowy	ośrodek luźny	$0,17 \pm 0,02$
	ośrodek zagęszczony	$0,30 \pm 0,03$
Zbiornik klinowy	ośrodek luźny	$-0,18 \pm 0,02$
	ośrodek zagęszczony	$-0,04 \pm 0,03$

$^x W_o$ - współrzędna punktu przecięcia stycznej do prostoliniowej części krzywej wypływu ośrodka z osią rzędnych (rys. 56 i 57)

PODSUMOWANIE

Przedstawione przykłady rozwiązań modelowych oraz wykonane badania eksperymentalne pozwalają stwierdzić, że sformułowany w pracy teoretyczny model przebiegu początkowej fazy wypływu ośrodka sypkiego ze zbiornika daje poprawny opis rzeczywistego procesu. Podstawą zaproponowanego modelu jest założenie, że w początkowej, nieustalonej fazie procesu wypływu propaguje się w ośrodku fala rozluźnienia. Zastosowanie do rozwiązania tego zagadnienia przybliżonej metody Janssena uprościło znacznie otrzymane równania, a ponadto pozwoliło na ilościowe porównanie otrzymanego rozwiązania z innymi przybliżonymi opisami wypływu pomijającymi zjawisko propagacji fali. Z przedstawionych porównań widać, że zaproponowany model daje wyniki spójne z uproszczonymi rozwiązaniami innych autorów [70,80]. Uzyskane wyniki stanowią rozszerzenie dotychczasowych rozwiązań, a w granicznym przypadku, bardzo dużej prędkości propagacji fali rozluźnienia, zmierzają do tych rozwiązań. Zgodnie z oczekiwaniami zaproponowany model ujmuje ponadto nowe jakościowo elementy rzeczywistego procesu wykraczające poza ramy dotychczasowych rozwiązań teoretycznych. Są to: propagacja strefy ruchu ośrodka w zbiorniku, odkształcenia objętościowe ośrodka, redystrybucja stanu naprężenia. Powiązanie tych elementów w jedną całość pozwala przewidzieć wielkość rozluźnienia ośrodka w poszczególnych obszarach zbiornika, a także umożliwia zlokalizowanie w każdej chwili procesu obszaru zwiększonego nacisku ośrodka na ściany zbiornika oraz dokładne wyznaczenie wartości tego nacisku. Zwiększenie nacisku normalnego w rozważanym modelu wynika z założonego przejścia stanu naprężenia z czynnego w bierny, przy czym wzrost ten jest zredukowany na skutek uwzględnienia skoku prędkości cząstek $[V_r]$ i wynikającego z tego skoku naprężenia $[S_r]$. W literaturze [71,78,79] często spotyka się rozważanie skoku naprężenia normalnego do ścian zbiornika przy założonej ciągłości naprężenia S_r oraz bez powiązania z kinematyką ruchu ośrodka, co daje w efekcie odpowiednio zawyżoną wartość skoku nacisku. Przedstawione wyniki można więc traktować jako dolną granicę skoku nacisku normalnego $[S_n]$.

Z uzyskanych rozwiązań modelowych wynika, że przebieg początkowej fazy wypływu ośrodka zależy w sposób bardzo wyraźny od parametrów mechanicznych ośrodka, a także od parametrów samego zbiornika, przy czym zależność ta jest znacznie silniejsza w przypadku zbiornika stożkowego. W szczególności model ten pozwala przewidzieć różny charakter zmian wydatku wypływu w początkowej fazie procesu. Wydatek ten może przyjmować różne wartości, większe i mniejsze od ustalonego wypływu, zależnie od właściwości ośrodka oraz od geometrii zbiornika. Wniosek ten stanowi nowy jakościowo element opisu procesu wypływu, gdyż możliwy był do sformułowania dopiero po wprowadzeniu do rozwiązań fali rozluźnienia. Równocześnie wniosek ten może mieć duże znaczenie praktyczne w przypadku dozowania małych porcji ośrodka sypkiego za pomocą uruchamiania wypływu na bardzo krótki okres.

Na podstawie przeprowadzonych pomiarów należy stwierdzić, że rozwiązania teoretyczne wynikające z zaproponowanego modelu zjawiska wykazują jakościową zgodność z wynikami badań eksperymentalnych. Przyczyny istniejących różnic ilościowych należy upatrywać w licznych uproszczeniach przyjętych w rozwiązaniu modelowym, takich jak pominięcie tarcia o pionowe ściany zbiornika klinowego i pominięcie odkształceń objętościowych ośrodka poniżej frontu fali dylatacji. Również niedokładność pomiaru wypływu ośrodka nie pozwala na pełną ilościową weryfikację modelu.

W wyniku przeprowadzonych badań eksperymentalnych stwierdzono istotny wpływ wilgotności ziarna pszenicy na prędkość propagacji zaburzenia w modelowym zbiorniku. Ze wzrostem wilgotności ziarna prędkość przemieszczania się frontu zaburzenia gwałtownie maleje. Dla wilgotności powyżej 20% zmienia się nagle charakter procesu. Zamiast frontu rozluźnienia ośrodka obserwuje się wtedy przemieszczającą się od dołu zbiornika ku górze strefę nieciągłości ośrodka. Taki rodzaj propagacji frontu ruchu materiału rozdrobnionego w zbiorniku polega w rzeczywistości na załamaniu się kolejnych chwilowych sklepień ośrodka. Niewielkie zagęszczenie takiego ośrodka zwiększa wytrzymałość sklepienia w stopniu wystarczającym do podtrzymania spoczywającego na nim ośrodka. Fala ruchu ośrodka dochodzi w takim przypadku tylko do pewnej wysokości zbiornika, po czym dalszy wypływ ustaje.

Drugim istotnym parametrem ośrodka wpływającym na prędkość przemieszczania się zaburzenia w zbiorniku jest gęstość upakowania ziaren ośrodka. Zmniejszenie porowatości ośrodka o około 3% powoduje ponad czterokrotne zmniejszenie prędkości fali. Porównując otrzymane wartości eksperymentalne z zależnością teoretyczną (18) oraz z wynikami rozważań teoretycznych innych autorów [12,13,51] należy stwierdzić, że zaobserwowana zależność doświadczalna w pełni potwierdza przewidywania teoretyczne, a ponadto jest znacznie silniejsza niż to wynika ze związku (18).

Na podstawie pomiarów przeprowadzonych na 5 wybranych ośrodkach sypkich można stwierdzić, że również rodzaj badanego materiału wpływa na prędkość propagacji fali. Ponieważ kąty tarcia wewnętrznego omawianych materiałów różnią się niewiele, można zatem spodziewać się, że o prędkości decydować będzie w tym przypadku wielkość elementarnego ziarna ośrodka. Zatem im większe elementarne ziarno ośrodka, a tym samym obszar sztywnego przemieszczania, tym większa prędkość propagacji fali. Należy się więc spodziewać, że z tego powodu największą prędkość fali rejestrowano w przypadku ziarna pszenicy i jęczmienia a najmniejszą w przypadku piasku. Interpretacji tej nie można rozszerzyć na eksperyment z kłóbkami buraka cukrowego, ze względu choćby na całkiem odmienne właściwości powierzchniowe tego materiału objawiające się bardzo dużym współczynnikiem tarcia. Wpływ tego ośrodka przebiega podobnie jak wcześniej omówiony wpływ pszenicy o bardzo dużej wilgotności, tzn. fala ruchu ośrodka przebiera kształt przemieszczającej się w górę zbiornika kilkucentymetrowej przerwy w materiale.

Nie zaobserwowano natomiast istotnych zmian prędkości przemieszczania się frontu fali rozluźnienia wzdłuż wysokości zbiornika. Otrzymane wyniki doświadczalne pozwalają zatem w jednoznaczny sposób wybrać pierwszy z rozważanych modeli propagacji fali, zakładający stałą prędkość fali, jako bardziej zbliżony do rzeczywistego procesu. Zmian prędkości można oczekiwać natomiast w wysokim zbiorniku na skutek różnego zagęszczenia ośrodka wzdłuż wysokości zbiornika. W takim przypadku prędkość fali rozluźnienia powinna rosnąć w miarę przemieszczania się w górę zbiornika. Chcąc zatem stosować przedstawiony mo-

del do wysokich zbiorników należy uwzględnić w nim zmianę prędkości fali spowodowaną zmianą gęstości ośrodka.

Należy przypuszczać, że również poniżej frontu fali rozluźnienia wystąpią odkształcenia objętościowe ośrodka, szczególnie w obszarze wylotu zbiornika. Dlatego też celowe wydaje się rozszerzenie podjętych badań poprzez uwzględnienie odkształceń objętościowych nie tylko na froncie fali rozluźnienia ale również w całej objętości ośrodka. Niezbędnym warunkiem jest jednak sformułowanie odpowiedniego równania konstytutywnego pozwalającego wyznaczyć jednoznacznie zależność naprężenie - odkształcenie w obszarze rozluźnienia ośrodka.

WNIOSKI

Przedstawione rozważania teoretyczne oraz badania doświadczalne początkowej fazy wypływu roślinnych ośrodków ziarnistych ze zbiornika pozwoliły na wyciągnięcie następujących wniosków:

1. Opracowany teoretyczny model zjawiska wypływu ujmuje nowe jakościowo elementy rzeczywistego procesu, wykraczające poza ramy dotychczasowych rozważań.

2. Zaproponowany model opisu początkowej fazy wypływu ośrodka sypkiego ze zbiornika wykazuje jakościową zgodność z wynikami badań doświadczalnych (obydwa te wnioski potwierdzają hipotezę H_1).

3. Badania doświadczalne przeprowadzone dla roślinnych ośrodków ziarnistych wskazują, że prędkość propagacji fali rozluźnienia zmienia się nieznacznie wzdłuż wysokości zbiornika, co uzasadnia przyjęcie pierwszego z rozważanych modeli, zakładającego stałą wartość prędkości fali (potwierdzenie hipotezy H_2).

4. Stwierdzono wyraźny wpływ rodzaju ośrodka ziarnistego na prędkość propagacji fali rozluźnienia. Prędkość fali rejestrowana w przypadku pszenicy i jęczmienia była znacznie większa niż dla rzepaku oraz piasku. Natomiast w przypadku kłbków buraka cukrowego obserwowano przemieszczającą się z dużo mniejszą prędkością nieciągłość ośrodka. Dla ziarna pszenicy stwierdzono również wpływ wilgotności i gęstości upakowania w zbiorniku na prędkość przemieszczania się fali rozluźnienia (potwierdzenie hipotezy H_3).

5. Duża wilgotność ziarna pszenicy (powyżej 20%) powodowała przemieszczającą się od dołu zbiornika ku górze strefę nieciągłości ośrodka. Nawet niewielkie jego zagęszczenie wpływało na zawieszanie się materiału nad otworem wylotowym.

6. W wyniku pomiarów przeprowadzonych na ziarnie pszenicy stwierdzono, że prędkość propagacji fali rozluźnienia zależy od parametrów zbiornika, a szczególnie od wielkości otworu wylotowego, chropowatości ścian oraz od kąta pochylenia ścian względem pionu.

7. Z uzyskanych rozwiązań teoretycznych wynika, że nieustalony wydatek wypływu w początkowej fazie procesu zależy od właściwości mechanicznych ośrodka oraz od geometrii zbiornika. Tezę tę dokumentują wyniki badań doświadczalnych potwierdzające, że wartość nieustalonego wypływu zależy od zagęszczenia ośrodka oraz od rodzaju zbiornika.

8. Zaproponowany model teoretyczny pozwala przewidzieć wielkość odkształcenia objętościowego ośrodka na froncie fali rozluźnienia, a także umożliwia wyznaczenie wartości zwiększonego nacisku dynamicznego na ściany zbiornika oraz jego lokalizację w każdej chwili procesu.

9. Uzyskane wyniki dają podstawę do kontynuowania i rozszerzenia tego typu badań. W następnym etapie należałoby uwzględnić odkształcenia objętościowe w całej masie ośrodka po wcześniejszym opracowaniu odpowiednich równań konstytutywnych.

LITERATURA

1. Aoki R., Tsunakawa H., The Pressure in a Granular Material at the Wall of Bins and Hoppers, J. Chem. Engn. Jpn. 2(1), 1969, 126-129.
2. Aoki R., Stresses of Powders and Granular Materials in Bins and Hoppers, Theoret. Appl. Mech. 26, 1978, 9-24.
3. Baker W.J., Triandafilidis G.E., Kinematics of Wave Propagation in Laterally Confined Columns of Sand, Proc. of the International Symposium on Wave Propagation and Dynamic Properties of Earth Materials, Albuquerque, 1976, 411-422.

4. Borcz A., Kmita J., Kozłowski J., Doświadczalne wyznaczanie wydatku swobodnego wypływu materiału sypkiego z silosu, Inż. i Bud. nr 5, 1979, 167-168.
5. Bransby P.L., Blair-Fish P.M., James R.G., An Investigation of the Flow of Granular Materials, Powder Technol., 8, 1973, 197-206.
6. Bransby P.L., Blair-Fish P.M., Initial Deformations during Mass Flow from a Bunker: Observations and Idealizations, Powder Technol., 11, 1975, 273-288.
7. Brennen C., Pearce J.C., Granular Material Flow in Two-dimensional Hoppers, J. Appl. Mech. Trans. ASME, 45(1), 1978, 43-50.
8. Chatlynne C.J., Resnick W., Determination of Flow Patterns for Unsteady-state Flow of Granular Materials, Powder Technol., 8, 1973, 177-182.
9. Cornish R.J., Pressure on a Hopper Wall at a Stress Discontinuity During Mass Flow, Powder Technol., 8, 1973, 1-12.
10. Cowin S.C., A Theory for the Flow of Granular Materials, Powder Technol., 9, 1974, 61-69.
11. Cowin S.C., The Theory of Static Loads in Bins, J. Appl. Mech., Trans, ASME, 44(3), 1977, 409-412.
12. Cowin S.C., Nunziato J.W., Waves of Dilatancy in a Granular Material with Incompressible Granules, Int. J. Engng. Sci. Vol. 19, 1981, 993-1008.
13. Cowin S.C., Comfort III W.J., Gravity - Induced Density Discontinuity Waves in Sand Columns, J. Appl. Mech. Trans. ASME, 49, 1982, 497-500.
14. Drescher A., Zagadnienia doświadczalnej weryfikacji modelu ciała rozdrobnionego o wzmocnieniu gęstościowym, Rozpr. Inż. 20, 1972, 351-387.
15. Drescher A., Badanie mechanizmów plastycznego płynięcia materiałów ziarnistych. Praca habilitacyjna, IPPT, Warszawa 1975.
16. Drescher A., Ostaficzuk S., Rudowski S., Trąmpczyński W., Fotogrametryczna metoda pomiaru płaskiej deformacji, Rozpr. Inż. 25, 1. 1976, 157-172.

17. Drescher A., Parcie i przepływ materiałów ziarnistych w wysokich zbiornikach. Prace IPPT nr 51, 1979.
18. Drescher E., Michałowski R., Ultradźwiękowa metoda badania gęstości ośrodków ziarnistych w procesach deformacji, Mech. Teoret. i Stos. 17, 1979, 441-449.
19. Dubis J., Kmita J., Badanie kinematyki ośrodka sypkiego w silosie, Inż. i Bud. nr 9, 1979, 343-345.
20. Dziendziel A., Kobiela S., Rybiński M., Obliczanie parć poziomych w silosach na przetwory zbożowe, Materiały VI Krajowej Konferencji Naukowo-Technicznej pt.: Problemy techniki pobierania, doprowadzania i dozowania materiałów ziarnistych, Warszawa 1979.
21. Dzięcielak R., Fala przyspieszenia w ośrodku konsolidującym, Rozpr. Inż. 26, 2, 1978, 307-322.
22. Feda J., Volume Changes of Sand in Triaxial Test, Proc. of the Second Seminar on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Łódź, 1970, 107-123.
23. Goodman M.A., Cowin S.C., Two Problems in the Gravity Flow of Granular Materials, J. Fluid Mech. 45(2), 1971, 321-339.
24. Goodman M.A., Cowin S.C., A Continuum Theory for Granular Materials, Arch. Rational Mech. Anal. Vol. 44, 1972, 249-266.
25. Grundas S., Horabik J., Wpływ wilgotności na lepko-sprężyste właściwości zboża, Polskie Towarzystwo Biofizyczne, Biofizyka (prace doświadczalne) Siedlce 1980, 299-316.
26. Hoffmann O.H., Neuere Grundlagen der Mechanik körniger Haufwerke, Grundlagen der Landtechnik, 25(2), 1975, 35-64.
27. Horabik J., A Method of Measurement of the Dilatation Wave Velocity in Granular Material, Zesz. Probl. Post. Nauk Rol. (w druku).
28. Horne R.M., Nedderman R.M., Stress Distribution in Hoppers, Powder Technol., 19, 1978, 243-254.
29. Jenike A.W., Storage and Flow of Solids, Arch. Inż. Łą., 12, 1966, 439-451.
30. Jenike A.W., Johanson J.R., On the Theory of Bin Loads, J. Eng. Ind., Trans. ASME, Vol; 91. 2, 1969.

31. Jenkins J.T., Static Equilibrium of Granular Materials, J. Appl. Mech. Trans. ASME, 42(3), 1975, 603-606.
32. Jenkins J.T., Gravitational Equilibrium of a Model Granular Media, Proc. of the U.S. - Japan Seminar on Continuum - Mechanical and Statistical Approaches in the Mechanics of Granular Materials, Gakujutsu Bunken Fukyu-Kai, Tokyo 1978, 181-188.
33. Kézdi A., Handbook of Soil Mechanics. Akadémiai Kiadó, Budapest 1974, Volume 1.
34. Kosiński W., Perzyna P., Analiza fal przyspieszenia w materiale reologicznym, Prace IPPT, nr 59, 1971.
35. Kosiński W., Analiza jednowymiarowych fal uderzeniowych i przyspieszenia w ośrodku niesprężystym, Mech. Teoret. i Stos. 14, 1976, 95-126.
36. Lakshman Rao V., Venkateswarlu D., Internal Pressures in Flowing Granular Materials from Mass Flow Hoppers, Powder Technol., 11, 1975, 133-146.
37. Levinson M., Shmutter B., Resnick W., Displacement and Velocity Fields in Hoppers, Powder Technol., 16, 1977, 29-43.
38. Mohsenin N.N., Physical Properties of Plant and Animal Materials, Vol. I, Structure, Physical Characteristics and Mechanical Properties. Gordon and Breach Science Publishers, New York 1970.
39. Molerus O., Theory of Yield of cohesive Powders, Powder Technol., 12, 1975, 259-275.
40. Morrison H.L., Richmond O., Application of Specer's Ideal Soil Model to Granular Materials Flow, J. Appl. Mech., Trans. ASME, 43, 1976, 49-53.
41. Mróz Z., Drescher A., Limit Plasticity Approach to Some Cases of Flow of Bulk Solids, J. Eng. Ind., Trans. ASME, 1969.
42. Mróz Z., Szymański C., Gravity Flow of a Granular Material in a Converging Channel, Arch. Mech. Stos., 23(6), 1971, 897-917.
43. Mróz Z., Drescher A., Podstawy teorii plastyczności ośrodków rozdrobnionych, Ossolineum 1972.

44. Mróz Z., Drescher A., Hueckel T., Doskonalenie metod badania parametrów płynięcia materiałów ziarnistych, Prace IPPT, nr 54, 1973.
45. Novosad J., Surapati K., Flow of Granular Materials: Determination and Interpretation of Flow Patterns, Powder Technol., 2, 1968, 82-86.
46. Nowacki W., Dąbrowski R., Silosy. Metody obliczeń i konstrukcja, Bud.Arch., Warszawa 1955.
47. Nunziato J.W., Walsh E.K., On the Influence of Void Compaction and Material Non-uniformity on the Propagation of One-dimensional Acceleration Waves in Granular Materials, Arch.Rat. Mech. and Anal., 64(4), 1977, 299-316.
48. Nunziato J.W., Walsh E.K., Small-amplitude Wave Behaviour in One-dimensional Granular Solids, J. Appl.Mech.,Trans. ASME, 44, 1977, 559-564.
49. Nunziato J.W., Kennedy J.E., Walsh E.K., The Behavior of One-dimensional Acceleration Waves in an Inhomogeneous Granular Solid, Int. J. Engng.Sci. 16(9), 1978, 637-648.
50. Nunziato J.W., Walsh E.K., One-dimensional Shock Waves in Uniformly Distributed Granular Materials, Int. J. Solids Structures, 14(8), 1978, 681-689.
51. Nunziato J.W., The Propagation of Plane Waves in Granular Media, Proc. of the U.S. - Japan Seminar on Continuum - Mechanical and Statistical Approaches in the Mechanics of Granular Materials, Gakujutsu Bunken Fukyu - Kai, Tokyo 1978, 291-300.
52. Oda M.; Initial Fabrics and Their Relations to Mechanical Properties of Granular Material, Soils and Foundations, 12(1), 1972, 17-36.
53. Oda M., Deformation Mechanism of Sand in Triaxial Compression Tests, Soils and Foundations, 12(4), 1972, 45-63.
54. Oda M., On Stress - Dilatancy Relation of Sand in Simple Shear Test, Soils and Foundations, 15(2), 1975, 17-29.
55. Oda M., Fabrics and Their Effects on the Deformation Behaviours of Sand, Depart.Found. Engng. Fac. Engng., Saitama Univ., Special Issue, 1976.

56. Oda M., Coordination Number and its Relation to Shear Strength of Granular Materials, Soils and Foundations, 17(2), 1977, 29-42.
57. Passman S.L., Jenkins J.T., Thomas J.J.P., Flow of a Granular Material in a Vertical Channel, Proc. of the U.S. - Japan Seminar on Continuum - Mechanical and Statistical Approaches in the Mechanics of Granular Materials, Gakujutsu Bunken Fukyu-Kai, Tokyo 1978, 171-180.
58. Praca zbiorowa, Magazynowanie ziarna zbóż, nasion strączkowych i oleistych, WNT, Warszawa 1975.
59. Praca zbiorowa, Sprężysto-plastyczne modele ośrodków rozdrobnionych, Ossolineum 1980.
60. Pukos A., Grundas S., Horabik J., Konstankiewicz K., O identyfikacji zjawisk sprężysto-plastycznych w mechanice gleb i materiałów roślinnych, Zesz. Probl. Post. Nauk Rol. z. 245 (w druku).
61. Raport z badań I-2/B-53/76, Dynamiczny napór piasku na ściany silosu w chwili otwarcia szczeliny wylotowej, Praca zespołowa wykonana pod kierunkiem prof. A. Borcza.
62. Savage S.B., Gravity Flow of Cohesionless Granular Materials in Chutes and Channels, J. Fluid Mech., 92, 1979, 53-96.
63. Schofield A., Wroth P., Critical State Soil Mechanics, McGraw-Hill, New York-London 1968.
64. Schöwedes J., Fließverhalten von Schüttgütern in Bunkern, Verlag Chemie, 1970.
65. Singley M.E., Chaplin R.V., The Flow of Particulate Materials, Trans. ASAE, 25(5), 1982, 1360-1366.
66. Szabó B., Stress State in Grain in Layer, Trans. of the International Conference in Lublin, Zesz. Probl. Post. Nauk Rol. z. 203, 349-356.
67. Szot B., Horabik J., Zagadnienia mechaniki ośrodków sypkich pochodzenia roślinnego, Problemy Agrofizyki 33, 1980.
68. Szumera Z., Magazynowanie materiałów trudnozsypnych w przemyśle paszowym. Materiały VI Krajowej Konferencji Naukowo-Technicznej pt., Problemy techniki pobierania, doprowadzania i dozowania materiałów ziarnistych, Warszawa 1979.

69. Szumera Z., Jung H., Opróżnianie komór silosowych z materiałów trudno zsypanych. Cz. I. Opróżnianie samoczynne, Cz. II. Urządzenie stymulujące opróżnianie komór silosowych, Przegląd Zbożowo-Młynarski nr 3, 1980, 24-28, nr 4, 1980, 28-31.
70. Szymański C., Przepływy dynamiczne ośrodków rozdrobnionych w zbieżnych kanałach, Praca doktorska, IPPT, Warszawa 1970.
71. Szymański C., Mróz Z., Analiza procesów mechanicznych w materiale rozdrobnionym w operacjach napełniania i opróżniania kanałów zbieżnych, Prace IPPT, nr 32, 1977.
72. Takahashi H., Yanai H., Tanaka T., An Approximate Theory for Dynamic Pressure of Solids on Mass-Flow Bins, An Approximate Theory for Dynamic Pressure of Solids on Funnel-Flow Bins. J. Chem. Eng. Jpn, 12(5), 1979, 369-382.
73. Tatsuoka F., Dilatancy Characteristics of Soil, Soils and Foundations, 15(2), 1975, 73-78.
74. Thompson S.A., Ross I.J., Walker J.N., Wells L.G., Vertical Wall Loads in a Model Grain Bin. Trans. ASAE, 25(5), 1982, 1344-1348.
75. Tomczyk S., Magazyny ziarna i innych nasion, PWRiL Warszawa 1970.
76. Tsunakawa H., Aoki R., Lateral Pressures of Granular Materials in a Model Bin, J. Chem. Eng. Jpn, 7(2), 1974, 131-134.
77. Tsunakawa H., Aoki R., The Vertical Force of Bulk Solids on Objects in Bins, Powder Technol., 11, 1975, 234-243.
78. Walters J.K., A Theoretical Analysis of Stresses in Silos with Vertical Walls, Chem. Eng. Sci., 28, 1973, 13-21.
79. Walters J.K., A Theoretical Analysis of Stresses in Axially-symmetric Hoppers and Bunkers, Chem. Eng. Sci., 28, 1973, 799-789.
80. Wol-Gajewska B., Zastosowanie związków teorii plastyczności do analizy nieustalonego wypływu ośrodków sypkich ze zbiorników, Praca doktorska, IPPT Warszawa 1978.
81. Zawidzki J., Opis zachowania się ośrodków sypkich podczas wypływu ze zbiorników cylindrycznych. Materiały VI Krajowej Konfe-

rencji Naukowo-Technicznej, pt. Problemy techniki pobierania, do-
prowadzania i dozowania materiałów ziarnistych, Warszawa 1979.

82. Zuilichem D.J., Van Egmond N.D., De Swart J.G.,
Density Behaviour of Flowing Granular Material, Powder Technol.,
10, 1974, 161-169.

Dotychczas ukazały się następujące zeszyty
PROBLEMÓW AGROFIZYKI

1. Jan Gliniński, Witold Stępniewski - Zastosowanie chromatografii gazowej w badaniach gleboznawczych. 1972.
2. Piotr Kowalik - Podstawy teoretyczne pomiarów potencjału wody glebowej. 1972.
3. Jan Gliniński, Jerzy Duliban - Potencjał oksydoredukcyjny w glebach. 1972.
4. Małgorzata Dąbek-Szreniawska - Mikrobiologiczne aspekty tworzenia się agregatów glebowych. 1972.
5. Bogusław Szot - Rozwój badań właściwości fizycznych materiałów rolniczych. 1972.
6. Ignacy Dechnik, Janusz Stawiński - Powierzchnia właściwa w badaniach fizykochemicznych i fizycznych właściwości gleb. 1973.
7. Adam Pukos, Ryszard Walczak - Podstawy teoretyczne badania właściwości mechanicznych gleb. 1973.
8. Bogusław Szot, Grażyna Kolemba - Metody oceny wylegania zbóż. 1973.
9. Janusz Haman, Bogusław Szot, Wanda Woźniak - Zagadnienie wymiany ciepła i masy w materiałach roślinnych. 1973.
10. Materiały seminarium poświęconego fizyce wody glebowej. Praca zbiorowa. 1973.
11. Henryk Czachor, Ryszard Walczak - Zamknięte źródła radioizotopowe w badaniach fizycznych właściwości gleb. 1974.
12. Zestawienie analizy spektralnej w badaniach rolniczych. Praca zbiorowa. 1974.
13. Krystyna Konstankiewicz, Adam Pukos, Ryszard Walczak - Domenowa teoria histerezy dla termodynamicznych procesów w glebie. 1974.

14. Jerzy Szczypa, Zofia Sokołowska - Zastosowanie radioizotopów do badania fizykochemicznych właściwości gleb. 1975.
15. Janusz Haman, Adam Pukos - Aktualne zagadnienia mechaniki gleb. 1975.
16. Jan Gliński, Zofia Stępniewska - Zastosowanie elektrod selektywnych w badaniach gleboznawczych. 1975.
17. Ignacy Dechnik, Jerzy Lipiec - Zwięzłość gleby jako czynnik środowiska rozwoju roślin. 1975.
18. Ignacy Dechnik, Stanisław Tarkiewicz - Zmiany właściwości agrofizycznych gleb pod wpływem działania narzędzi aktywnych. 1975.
19. Ryszard Walczak, Barbara Witkowska - Metody badania i sposoby opisywania agregacji gleby. 1976.
20. Władysław Byszewski, Janusz Pała - Niektóre aspekty związku między poziomem mechanizacji produkcji roślinnej a właściwościami fizycznymi roślin. 1976.
21. Ignacy Dechnik, Ryszard Dębicki - Czynniki zaskorupiania gleb oraz metody przeciwdziałania temu zjawisku. 1976.
22. Helena Lisowa, Janusz Haman, Tadeusz Lis - Właściwości cieplne ciał kapilarno-porowatych i metody ich pomiaru. 1976.
23. Ignacy Dechnik, Ryszard Dębicki - Wykorzystanie syntetycznych środków do ulepszania gleb. 1977.
24. Ludomir Pavel, Stanisław Uziak - Metody badania składu i właściwości mineralnych wysokodispersyjnych składników gleb. 1977.
25. Małgorzata Dąbek-Szreniawska, Maria Drązkiewicz - Zagadnienie sorpcji mikroorganizmów w glebach. 1977.
26. Ryszard Turski, Henryk Domżał, Anna Słowińska-Jurkiewicz, Jan Hodara - Metody badania i wskaźniki oceny agrofizycznego efektu działania narzędzi uprawowych na glebę. 1977.
27. Jan Kossowski, Ewa Sikora - Ciepłe właściwości gleb i metody ich wyznaczania. 1978.
28. Edmund Ślusarczyk, Ewa Kośmider - Potencjał wody w glebie i roślinie oraz metody jego wyznaczania. 1978.
29. Bogusław Szot, Jerzy Tys - Przyczyny osypywania się nasion roślin oleistych i strączkowych oraz metody oceny tego zjawiska. 1979.

30. Jolanta Kaniewska, Piotr Kowalik - Numeryczne równania przepływu wody w glebie. 1979.
31. Marek Malicki - Przegląd metod pomiaru wilgotności gleb i oceny ich przydatności w badaniach polowych. 1979.
32. Ignacy Dechnik, Jerzy Lipiec - Przewodnictwo wodne gleby w strefie nienasyconej i metody jego pomiaru. 1980.
33. Bogusław Szot, Józef Horabik - Zagadnienia mechaniki ośrodków sypkich pochodzenia roślinnego. 1980.
34. Jerzy Szczypa, Jerzy Czajkowski - Stabilność układów zdyspergowanych a procesy flokulacji i aglomeracji. 1980.
35. Stanisław Dąbrowski, Józef Grochowicz, Wiktor Pietrzyk - Elektryczne właściwości nasion i ich praktyczne wykorzystanie. 1981.
36. Słownik agrofizyczny. Praca zbiorowa. 1981.
37. Piotr Staszczuk, Andrzej Waksmundzki - Właściwości warstewek hydratacyjnych na powierzchni ciał stałych. 1981.
38. Grażyna Skubisz - Zagadnienie sprężystości żdźbła zbóż. 1982.
39. Jan Gliński, Witold Stępniewski, Stanisław Łabuda - Pobieranie tlenu i wydzielanie dwutlenku węgla w środowisku glebowym. 1983.
40. Jerzy Lipiec - Możliwości oceny przewodnictwa wodnego gleb na podstawie niektórych właściwości. 1983.
41. Ryszard Walczak - Modelowe badania zależności retencji wodnej od parametrów fazy stałej gleby. 1983.
42. Witold Stępniewski, Jan Gliński - Procesy transportu gazów w glebie i skład powietrza glebowego. 1983.
43. Jan Gieroba, Kazimierz Dreszer - Procesy przemieszczania ziarna w przenośnikach śrubowych i zabierakowych. 1984.
44. Jan Gliński, Witold Stępniewski - Procesy biologiczne i chemiczne w glebie uzależnione od jej stanu natlenienia. 1984.
45. Witold Stępniewski, Jan Gliński - Reakcja roślin na stan aeracji gleby. 1984.
46. Witold Stępniewski, Jan Gliński - Metody pomiaru wskaźników aeracji gleb. 1984.
47. Krystyna Konstankiewicz - Porowatość gleby - definicje i metody oznaczania. 1985.

